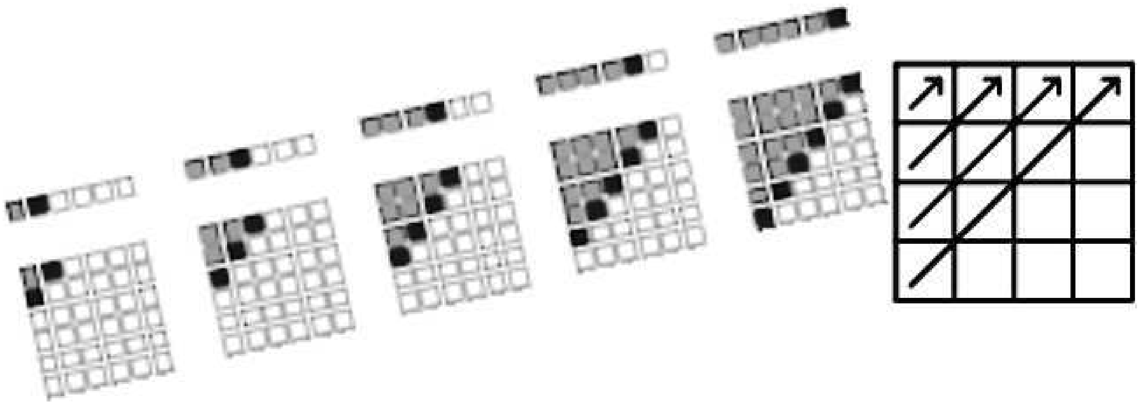
BG/BRG Bruck/Mur

Allgemeine Algebra

Ein rekursives Axiomensystem zur Definition der natürlichen Zahlen und Grundrechnungsarten



Fachbereichsarbeit aus Mathematik

vorgelegt bei Mag. Horst Paar

von Daniel Kraft

8. B

2005/6

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bereits vor drei Jahren war ich fasziniert als ich entdeckte, dass alle Grundrechnungsarten (Addition, Multiplikation und Potenz) gegenseitig von einander abhängig waren; denn die Potenz führt zu mehrfacher Multiplikation, die Multiplikation wiederum zu mehrfacher Addition. Die noch fehlenden Operationen Subtraktion, Division, Wurzeln und Logarithmen ergeben sich als Umkehrungen dieser Rechnungsarten.

Als nächstes fiel mir auf, dass auch die Hierarchie der Zahlenmengen mehr oder weniger in dasselbe Schema eingepasst werden konnte — so geht man von den natürlichen Zahlen aus, bildet die ganzen Zahlen, indem man die Addition umkehrt, danach die rationalen, indem man die Multiplikation umkehrt, und benötigt für Wurzeln und Logarithmen bereits die reelen oder gar komplexen Zahlen.

Bereits damals trieb mich mein geistiger Drang, alles möglichst allgemein und abstrakt zu formulieren (den ich möglicherweise über das Programmieren erlernt habe, da man dort danach trachtet, für "guten" Code möglichst allgemein und abstrakt zu schreiben), dazu, bei diesem rekursiven Prinzip der Grundrechnungsarten weiter zu denken, und die allgemein akzeptierte Hierarchie der Zahlensysteme zu hinterfragen; denn es war für mich einfach ein unschöner Systembruch, dass es zwar eigene Zahlen für Brüche gab, jedoch zwischen Wurzeln und wirklich transzendenten Zahlen nur sehr vage unterschieden wurde.

Meine ersten Überlegungen diesbezüglich fasste ich einem Referat, das ich jedoch nie hielt, ähnlich grob ausgearbeitet zusammen, und war bereits zu dem Schluss gekommen, dass man unendlich viele Zahlenmengen definieren kann, die stets abzählbar bleiben.

Neben der Eigenart, alles oft sogar viel zu weit abstrahieren und verallgemeinern zu wollen, bin ich auch noch sehr kritisch veranlagt und neugierig, ja fast aufrührerisch, gerade allgemein akzeptierte "Dogmen" in Frage zu stellen oder sogar widerlegen zu wollen. Deshalb fragte ich mich auch schon lange, *weshalb* die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten, und stellte vor einem Jahr erste Überlegungen dazu an, die die Grundlage der Beweise, die ich in dieser Arbeit ausgearbeitet habe, bilden. Auch war mir die Tatsache, dass "Minus mal Minus Plus gibt", schon lange ein "Dorn im Auge" bzw. etwas, dass ich gerne widerlegt hätte oder zumindest selbst beweisen wollte, um mir die Richtigkeit zu verdeutlichen. Gerade dieser Satz war für mich interessant, da es sich dabei um genau jene Tatsache handelt, die als Konsequenz die komplexen Zahlen, die für uns ja ziemlich unwirklich und unnatürlich sind, fordert.

Im Sommer 2005 legte ich schließlich den endgültigen Grundstein der Allgemeinen Algebra. Ich erarbeitete ein System von Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen, an dem ich selbst viel über die Natur unserer Zahlen gelernt habe, und das endlich viele meiner Fragen befriedigend beantwortete. Deshalb nahm ich die Möglichkeit gerne an, darüber im Rahmen dieser Arbeit schreiben zu können. Später fand ich heraus, dass von **Giuseppe Peano** bereits 1889 ein ähnliches Axiomensystem angegeben wurde, wobei jedoch darauf beruhende, bereits existierende Ansätze völlig anders strukturiert sind, als ich es bei meinem eigenen System getan habe.

Ich hoffe, dass dem kritischen Leser viele Fragen, die ihn beschäftigen, wie sie mich selbst beschäftigt haben, durch meine Überlegungen und Erklärungen in dieser Arbeit beantwortet werden, und ebensoviele neue Fragen in sein Interesse tauchen werden, er vielleicht angeregt wird, dort, wo ich meinen Weg im beschränkten Rahmen einer Fachbereichsarbeit nicht weiter gehen konnte, selbst tätig zu werden, und weiter zu denken. Sei es meinem Vorbild folgend, oder noch besser, seine eigene Note einfließen lassend. Es gibt allenfalls noch viel zu tun, ich konnte bestenfalls ein Fundament als Anstoß fertigstellen, auf dem jeder seine persönliche Säule des Tempels der Zahlen, die mehr von Gott gegeben als vom Mensch geschaffen zu sein scheinen, errichten kann; das Richtfest nach Fertigstellung des Dachstuhles wird wohl kein Mensch jemals erleben können.

Bei der Beschäftigung mit diesem faszinierenden Gebilde bin ich immer mehr zu der Überzeugung gelangt, dass es sich bei den Zahlen, den Grundrechnungsarten, in beschränktem Maße auch bei der gesamten Mathematik selbst, nicht um ein Menschenwerk handelt (als das die Mathematik oft im Vergleich zu den "echten" Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie gesehen wird), sondern vielmehr um *das* von Gott erschaffene Naturgesetz schlechthin! Auch bin ich mir sicher, dass, wenn es irgendwo im Universum oder in anderen Universen intelligentes Leben gibt, diese Lebensformen dieselbe Vorstellung der Zahlen und Grundrechnungsarten haben wie wir; höchstens die Anzahl der Koordinaten in Vektoren mag unterschiedlich sein. Schon **Carl Friedrich Gauß** sagte treffend:

> Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik.[1]

An dieser Stelle möchte ich mich nun bei all jenen bedanken, die mir bei meiner Arbeit helfend und unterstützend, aktiv wie passiv, zur Seite standen. Allen voran meinem Mathematikprofessor und Betreuer dieser Arbeit, Herrn Mag. Horst Paar, und Mag. Karl-Heinz

[1] Wikiquote: Carl Friedrich Gauß. (19. 9. 2005).
http://de.wikiquote.org/wiki/Carl_Friedrich_Gau%C3%9F
(15. 2. 2006).

Zangl, der mir die Grundlagen zur Verfassung einer wissenschaftlichen Arbeit näher brachte. Aber nicht zuletzt gebührt mein aufrichtiger Dank auch meinen Eltern und Großeltern, meiner Schwester und unseren Hunden, die allesamt Verständnis dafür haben mussten und hatten, dass ich zeitweise nicht immer soviel Zeit wie gewohnt für sie übrig hatte.

Aber ich möchte diese Gelegenheit auch dazu nutzen, all jenen Dank zu sagen, die zwar nicht direkt an dieser Arbeit, doch aber indirekt daran beteiligt waren, indem sie maßgeblich an meiner geistigen Entwicklung beteiligt waren. Ich möchte daher nochmals meine Dankbarkeit gegenüber meinen Eltern, die mir fast alles gegeben haben, was ich heute mein Eigen nennen darf, allen meinen Professoren, meinem Klassenvorstand, meiner ganzen Schule unter Frau Direktor HR Mag. Margarete Müller, die mir in den letzten Jahren sehr entgegen gekommen ist, und auch meiner früheren Mathematiklehrerin Mag. Berta Kaiser aussprechen.

Ohne jeden einzelnen der oben genannten wäre ich heute wohl nicht der, der ich froh bin zu sein; und auch diese Arbeit hängt wohl zu einem Großteil von jedem davon ab, weshalb ich ihnen allen nochmals von ganzen Herzen danken möchte.

Oberaich, 23. 2. 2006

Kapitel 1

Grundlagen

Im Folgenden werde ich mathematische Prinzipien erklären, die im Verlauf der Arbeit als Grundlagen vorausgesetzt werden.

1.1 Die *Genau*igkeit der Mathematik

Ein wichtiges Wort in mathematischen Sätzen oder Beschreibungen ist *genau*; die Bedeutung weicht meistens (besonders bei **hervorgehobenen** Ausdrücken) etwas von der sprachlichen Bedeutung ab.

Genau wenn a, dann b. "**Wenn** a, **dann** b." bedeutet, dass man aus der Wahrheit von a auf die von b schließen kann, nicht aber unbedingt auf die Unwahrheit von b, wenn a falsch ist.

Wird jedoch das **genau** hinzugefügt, handelt es sich um *Äquivalenz*; in diesem Fall ist b wirklich *nur* dann wahr, wenn es auch a ist; also ist es auch erlaubt, von b auf a zu schließen.

Beispiel "**Wenn** es regnet, **dann** ist die Straße nass." Diese Aussage ist offensichtlich wahr. Der umgekehrte Fall ("**Wenn** die Straße nass ist, **dann** regnet es.") gilt jedoch nicht, da die Straße z. B. auch dann nass ist, wenn Schnee auf ihr getaut ist. Die Beifügung **genau** ist in diesem Fall nicht erlaubt.

Auch darf ein Mann seiner Frau gerne mit "**Wenn** ich wach bin, **dann** denke ich an dich." schmeicheln, das **genau** sollte er hier aber unterlassen (da er sonst des Nachts von einer anderen träumt).

Andererseits sollte eine Frau auf den Heiratsantrag ihres Freundes nach der Überlegung "**Genau wenn** ich ihn liebe, **dann** werde ich ihn heiraten." antworten; denn wenn sie ihn liebt, sollte sie annehmen, und wenn sie annimmt, sollte sie ihn auch lieben, und sich nicht nur z. B. Reichtum erwerben wollen.

Andere klassische Vertreter für Äquivalenzaussagen sind natürlich algebraische Gleichungsumformungen: "**Genau wenn** $x{+}8{=}19$ ist, **dann** ist $x{=}11$."

Genau ein Element Eine Aussage wie "Ein Element hat keinen Vorgänger." bedeutet genau genommen nicht, dass es nicht eventuell auch zwei oder noch mehr Elemente geben kann, die dieselbe Bedingung erfüllen. Mit "**Genau ein** Element hat keinen Vorgänger." wird dies jedoch ausgeschlossen.

1.2 Rekursion

In der Informatik wird es als *Rekursion* bezeichnet, wenn sich ein Programm selbst ausführt; das kann zu Endlosschleifen führen. Der Mathematiker dagegen versteht unter der *rekursiven Definition einer Funktion* f eine Definition, die für $f(a)$ auf den Werten von f für andere Zahlen beruht.

Im Folgenden wird Rekursion dazu verwendet, unendliche Folgen zu definieren. Dabei wird das erste Glied der Folge explizit festgelegt, und alle weiteren Glieder werden dadurch definiert, dass festgelegt wird, wie ein beliebiges Glied aus seinem Vorgänger gebildet werden kann.

Beispiel Die Folge der ungeraden Zahlen, aufsteigend sortiert, $(< 1,\ 3,\ 5,\ ... >)$ kann rekursiv definiert werden:

$$u_1{=}1,\ \ u_{n+1}{=}u_n{+}2$$

1.3 Beweis durch vollständige Induktion

Beim *Beweis durch vollständige Induktion* handelt es sich um ein Beweisverfahren, das in seiner Grundkonzeption der Rekursion sehr ähnlich ist. Um zu zeigen, dass eine bestimmte Eigenschaft für alle (unendlich viele) Elemente einer Folge (z. B. für alle natürlichen Zahlen) gilt, wird dieser Prozess in zwei Stufen aufgeteilt:

1. Zeige, dass die Eigenschaft für das erste Element (z. B. die Zahl 0) gilt.

2. Zeige, dass sie für ein Element gilt, wenn sie für seinen Vorgänger gilt.

Beispiel Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gegeben durch $\frac{n(n+1)}{2}$. Um diese Annahme zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass diese Formel für $n{=}0$ gilt (diese Summe sollte 0 ergeben):

$$\frac{0(0+1)}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Wenn die Formel für n gilt, sollte sie für $n+1$ den Wert $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ ergeben:

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

Deshalb muss die Formel für alle natürlichen Zahlen bis ins Unendliche gelten, ohne dass wir jeden Fall einzeln überprüfen müssen!

Kapitel 2

Die Allgemeine Algebra

An dieser Stelle möchte ich das Konzept und die daraus folgenden Tatsachen der Allgemeinen Algebra erläutern.

2.1 Allgemeines

2.1.1 Die Axiome

Eine Allgemeine Algebra besteht aus einer Zahlenmenge $\mathbb{G}$ und einer Funktion $ink(a)=b$; diese drei Bedingungen (Axiome) müssen erfüllt sein:

1. $(a\in\mathbb{G})\Rightarrow(b\in\mathbb{G}\wedge b\neq a)$: Die Funktion *ink* ist für alle Elemente aus $\mathbb{G}$ definiert und ihr Ergebnis stets von ihrem Argument verschieden.

2. Für alle von einander verschiedenen zwei Zahlen c, $d\in\mathbb{G}$ erreicht man durch Iteration mit *ink* **entweder** d von c aus, **oder** umgekehrt.

3. $\exists\, d\in\mathbb{G}$: $\forall\, c\in\mathbb{G}$: $ink(c)\neq d$: Es gibt mindestens eine Zahl in $\mathbb{G}$, die nicht als Ergebnis von *ink* (mit Argumenten aus $\mathbb{G}$) auftreten kann.

Aus diesen Axiomen folgt, dass es **genau eine** Zahl aus $\mathbb{G}$ gibt, die Axiom 3 genügt. Denn gäbe es zwei (oder noch mehr), wäre dadurch Axiom 2 verletzt, da keine dieser beiden Zahlen je als Ergebnis von *ink* auftreten kann.

Deshalb kann man die Zahlenmenge $\mathbb{G}$ auch dadurch gegeben sehen, dass man ebendieses erste Element und *ink* kennt, und quasi durch unendliche Iteration mit dieser Funktion die gesamte Menge aufbauen kann.

Konkret Die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$, wobei ich 0 zu ihnen gehörig sehe) als Grundmenge $\mathbb{G}$ bilden zusammen mit der Inkrementierung (Bilden des Nachfolgers, Addition von 1) eine Allgemeine Algebra:

1. Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist selbst eine natürliche Zahl; außerdem ist er für jede Zahl von der Zahl selbst verschieden (da er ja um 1 größer ist).

2. Für zwei natürliche Zahlen c und d, die von einander verschieden sind, erreicht man durch fortgesetzte Inkrementierung der kleineren irgendwann (nach endlich vielen Iterationen) die größere; umgekehrt ist dies jedoch nicht möglich.

   Hätte man aber eine modulare Arithmetik (also alle Zahlen sind stets der Rest bei Division durch ein endliches n, und daher kleiner als n) vorliegen, wäre dieses Axiom nicht erfüllt, da man in diesem Fall durch fortgesetzte Inkrementierung *alle* Zahlen beliebig oft durchlaufen könnte!

3. Innerhalb der natürlichen Zahlen gibt es keine Zahl, deren Nachfolger 0 ist (da man dazu bereits die negativen Zahlen benötigt).

Deshalb kennt man quasi alle natürlichen Zahlen, wenn man nur 0 und zu jeder Zahl ihren Nachfolger kennt.

2.1.2 Weiterführendes

Null und Eins

Da in unserer Arithmetik die Zahlen 0 und 1 von besonderer Bedeutung sind, sind sie auch für eine Allgemeine Algebra wichtig. Deshalb wird ihre "erste Zahl" (nach Axiom 3) als *Nullelement 0* bezeichnet, und $ink(0)$ als *Einselement 1*.

Unendlichkeit

Beinahe direkt aus den Axiomen folgt auch, dass man durch Iteration mit *ink* von keinem $a \in \mathbb{G}$ zu sich selbst gelangen kann. Denn da zumindest einmal *ink* aufgerufen werden muss, erhält man dadurch nach Axiom 1 ein $b \neq a$, zu dem man außerdem von a gelangen kann. Deshalb ist es nach Axiom 2 unmöglich, von b wieder zu a zurück zu kommen!

Daraus folgt, dass $\mathbb{G}$ eine unendliche Menge sein muss, da man die Iteration mit *ink* von *0* aus nach Axiom 1 unendlich weit fortsetzen kann, und sich keine einzige Zahl dabei wiederholen darf (was dem vorherigen Absatz widersprechen würde).

Vergleichen von Zahlen

Der Vergleich von zwei Zahlen a, $b \in \mathbb{G}$ wird in einer Allgemeinen Algebra am besten mit Hilfe von *ink* und der Iteration definiert. Demnach ist $a<b$ **genau dann** wahr, wenn man durch Iteration mit *ink* von a nach b gelangen kann. Die übrigen Vergleichsoperatoren können darauf basierend trivial definiert werden:

- $c>d \Leftrightarrow d<c$
- $c \leq d \Leftrightarrow c \not> d$
- $c \geq d \Leftrightarrow c \not< d$

Eine wichtige Eigenschaft des Vergleichs ist es, dass für zwei beliebige a, $b \in \mathbb{G}$ **genau eine** der Bedingungen $a<b$, $a=b$ und $a>b$ wahr ist:

- Wenn $a=b$ ist, müssen die beiden anderen Bedingungen falsch sein, da man weder von a nach b noch umgekehrt kommen kann (ansonsten käme man ja von a zu sich selbst!).
- Wenn dagegen $a<b$ gilt, kommt man von a nach b — weshalb weder $a=b$, noch (nach Axiom 2) $a>b$ gelten darf.
- Der Beweis für $a>b$ verläuft analog, indem man einfach a und b miteinander vertauscht.

Wenn $a<b$ und $b<c$ gilt, ist auch $a<c$; wenn man von a nach b, sowie von b nach c kommt, muss man ebenso von a nach c kommen.

Vorgänger und Nachfolger

Für zwei Zahlen a, $b \in \mathbb{G}$ mit $ink(a)=b$ heißt b der *Nachfolger* von a, und a der *Vorgänger* von b.

Jede Zahl hat **genau einen** Nachfolger, da einerseits mindestens einer existieren muss (nach Axiom 1), dieser aber (da *ink* eine Funktion ist) auch eindeutig ist.

Ebenso hat jede Zahl außer *0* **genau einen** Vorgänger. Es ist bekannt, dass alle diese Zahlen **mindestens einen** Vorgänger haben müssen; und gäbe es zu einer Zahl zwei Vorgänger a_1 und a_2, so käme man durch Iteration mit *ink* von a_1 zu b; nach Axiom 2 müsste man aber auch weiter nach a_2 kommen, und käme mit einer weiteren Iteration nochmals zu b; also von b nach b, was nicht möglich ist.

Der Index

Da das Zählen auch für eine Allgemeine Algebra eine elementare Operation ist, die ich hier nicht exakt definieren und axiomatisieren kann, tauchen sehr wohl natürliche Zahlen, obwohl sie in gewisser Weise durch diese Arbeit definiert und erklärt werden sollen, in eingeschränktem Maße als Indizes von Folgen auf.

Das Bindeglied zwischen diesen Folgenindizes und den Elementen einer Allgemeinen Algebra ist deren *Index*, der durch die Funktion *ind* ausgedrückt wird. Dabei handelt es sich bei $ind(a)$ um die Anzahl an Iterationsschritten, um von *0* nach a zu gelangen. Für *0* ist der Index 0.

Formal (eben mit Hilfe einer Folge) kann der Index so festgelegt werden:

$$(z_0 = \mathit{0},\ z_{n+1} = ink(z_n)) \Rightarrow ind(z_m) := m$$

Es ist offensichtlich, dass dieselben Indizes nur den denselben Elementen zugeordnet werden können, da man über den Index **eindeutig** ein Element finden kann (mit Hilfe dieser Folge).

Außerdem ist bei Betrachtung dieser Folge leicht zu erkennen, dass der Index des Nachfolgers einer Zahl um eins größer ist als ihr eigener Index (da der Nachfolger das nächste Folgenglied ist):

$$\forall\, a \in \mathbb{G}\colon ind(ink(a)) = ind(a) + 1$$

Als Letztes ist noch zu erwähnen, dass ein Element $a \in \mathbb{G}$ **genau dann** kleiner, gleich oder größer als ein anderes Element b ist, wenn dieselbe Relation auch auf die beiden Indizes zutrifft. Das lässt sich ebenfalls sehr leicht anhand dieser Folge erkennen, da der Index mit weiterem Fortschreiten der Iteration (was ja größere Elemente bewirkt) auch immer größer wird (für immer spätere Glieder der Folge).

Konkret Im Fall der natürlichen Zahlen ist der Index möglicherweise etwas verwirrend; denn er ist ja selbst eine natürliche Zahl, und so ist $ind(a) = a$, weshalb der Index vielleicht als überflüssig oder unnötig kompliziert erscheint.

Da die Allgemeine Algebra jedoch allgemeiner definiert ist (also nicht direkt eine Definition von $\mathbb{N}$ ist), und um außerdem die bei der Definition verwendeten Indizes von Folgen von den selbst definierten natürlichen Zahlen klar zu trennen, ist der Index meiner Meinung nach dennoch unbedingt nötig.

Dualität

Der Index kann aber auch dazu genützt werden, eine Verbindung zwischen zwei "verschiedenen" Allgemeinen Algebren herzustellen, indem man setzt:

$$(a \equiv \overline{a}) \Leftrightarrow (ind(a) = ind(\overline{a}))$$

Eine Funktion f: $\mathbb{G}^n \rightarrow \mathbb{G}$ heißt **genau dann** *dual-regulär*, **wenn** sie für äquivalente Argumente ein äquivalentes Ergebnis liefert, also dann, wenn sie sich quasi in allen Allgemeinen Algebren gleich verhält (was für "die meisten" Funktionen zutreffen dürfte):

$$(a \equiv \overline{a} \wedge b \equiv \overline{b} \wedge c \equiv \overline{c} ...) \Rightarrow (f(a,\ b,\ c,\ ...) \equiv f(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ ...))$$

Da auch die Indizes von Elementen selbst (als natürliche Zahlen) eine Allgemeine Algebra bilden (mit $a \equiv ind(a)$), gilt für eine dual-reguläre Funktion f:

$$f(a,\ b,\ c,\ ...) \equiv f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...)$$

Daraus kann man weiter auf die "Distributivität" der Indexfunktion über f schließen:

$$ind(f(a,\ b,\ c,\ ...)) = f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...)$$

ink ist ein Beispiel für eine solche dual-reguläre Funktion, vielleicht sogar die "offensichtlichste". Denn praktisch per Definition wird der Index um eins erhöht, wenn *ink* auf ein Element angewendet wird. Deshalb sind die neuen Indizes auch nur **genau dann** gleich, **wenn** sie vorher gleich waren.

2.2 Verknüpfungen

Alle Zahlen sind uninteressant, wenn man nicht mit ihnen rechnen kann; alle Computer wären sinnlos, wenn keine Verknüpfungen für die Zahlen definiert wären. Dies ist natürlich auch für die Allgemeine Algebra gültig — daher werden Rechnungsarten (wie Addition, Multiplikation, Potenz) benötigt.

2.2.1 Omikron

Es fällt bei genauerer Betrachtung auf, dass diese üblichen Rechnungsarten rekursiv aufeinander beruhen: a^b ist die Multiplikation von a mit sich selbst (mit b Faktoren). Weiters ist $a \cdot b$ die Addition von a zu sich selbst, wieder mit b Summanden.

Und die Addition? $a{+}b$ ist die b-fache Anwendung der Inkrementierung auf a — das bringt uns zur Allgemeinen Algebra zurück.

Die Omikron-Verknüpfungen bilden diese “normalen” Rechnungsarten; sie können rekursiv definiert werden.

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon\ (c_0{=}a,\ c_{n+1}{=}ink(c_n)){\Rightarrow}ao_0b{=}c_{ind(b)}$$

Daraus ergibt sich die weiter oben erwähnte Semantik der Addition (b-fache Inkrementierung mit ink). Zur Vereinfachung wird im Weiteren das Symbol $\oplus$ für o_0 verwendet.

Beispiel Wenn auf diese Weise die Summe 5+3 definiert wird, ergibt sich die Folge $<5,\ 6,\ 7,\ 8,\ ...>$. Das Element mit dem Index 3 dieser Folge (wenn bei 0 zu zählen begonnen wird) ist 8, also wirklich das korrekte Ergebnis dieser Addition.

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon\ (d_1{=}a,\ d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m){\Rightarrow}ao_nb{=}d_{ind(b)}$$

Dies ist gleich der obigen Erläuterung von Multiplikation und Potenz, nur werden hier auch noch unendlich viele Rechnungsarten “über” der Potenz eingeführt. Zur Vereinfachung sei $\otimes$ äquivalent zu o_1, und a^b gleichbedeutend mit ao_2b.

Beispiel Für das Produkt dieser beiden Zahlen 5·3 ergibt sich die Folge $<5,\ 5{+}5,\ 5{+}5{+}5,\ ...>=<5,\ 10,\ 15,\ ...>$. Wenn die Folge diesmal mit dem Index 1 beginnt, ist wieder das 3. Element das gewünschte Ergebnis 15.

Für die Potenz 5^3 gilt analog als Folge $<5,\ 5{\cdot}5,\ 5{\cdot}5{\cdot}5,\ ...>=<5,\ 25,\ 125,\ ...>$; ihr drittes Glied ist wiederum das richtige Ergebnis 125.

Die Verknüpfungen “über” der Potenz (o_3, o_4...) sind in unserem praktischen Gebrauch unüblich; es reicht vorerst zum Verständnis der folgenden Überlegungen völlig aus, sie sich am Beispiel von Addition, Multiplikation und Potenz zu verdeutlichen. Ich werde dieses “Neue”, das ich mit dieser Definition eingeführt habe, in einem späteren Kapitel behandeln.

Die Omikronverknüpfung ($f(a,\ b){=}ao_nb$) ist dual-regulär. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die ebenfalls dual-reguläre Funktion ink mehrfach, und zwar nur vom *Index* von b abhängig, angewendet wird. Deshalb müssen für gleiche Indizes (äquivalente Argumente) dieselben (äquivalente) Ergebnisse erreicht werden.

Wenn man nun die weiter oben erwähnte Distributivität der Indexfunktion über jeder dual-regulären Funktion dazu nimmt, folgen einige Sätze, die zwar intuitiv wirken, aber vor allem für die formalen Beweise eine nicht unbedeutende Rolle spielen, wie z. B.:

$$ind(a{\oplus}b){=}ind(a){+}ind(b)$$

2.2.2 Umkehrungen

Neben den Verknüpfungen der Addition, Multiplikation und Potenz gibt es auch noch die Subtraktion, Division sowie Wurzeln und Logarithmen — die zugehörigen Umkehrverknüpfungen.

Wenn $ao_nb{=}c$ ist, kann bei der Umkehrung entweder a oder b gesucht sein — folglich müssen zwei verschiedene Arten von Umkehrungen definiert werden (dieser Unterschied kommt erst bei nicht-kommutativen Verknüpfungen zum Tragen, so gibt es Wurzeln und Logarithmen als Umkehrung der Potenz).

$$(a{=}c\iota_nb)\Leftrightarrow(ao_nb{=}c)$$

$$(b{=}c\nu_na)\Leftrightarrow(ao_nb{=}c)$$

Es fällt auf, dass ich die Umkehrungen nicht direkt, sondern nur implizit definiere. Damit umgehe ich das Problem, dass manche Umkehrungen mehrdeutig sind (z. B. die Wurzel, deren Wert positiv oder negativ sein kann); ich muss hier weder einen bestimmten Wert den anderen vorziehen, noch mit Mengen als Ergebnis arbeiten. Dafür ist diese Definition nur beschränkt einsetzbar; so kann kein konkreter Wert ohne zusätzliche Definitionen berechnet werden (da keiner definiert ist), es können nur alle möglichen oder z. B. der größte ausgegeben werden.

Der Einfachheit halber werde ich $\ominus$ als Synonym für ι_0 verwenden; ebenso sei $\frac{a}{b}$ gleichbedeutend mit $a\iota_1b$.

Auch die (eindeutige) Umkehrung von *ink* sei hier definiert:

$$(ink(a){=}b)\Leftrightarrow(dek(b){=}a)$$

2.2.3 Besondere Elemente

Was ist das Besondere, das Faszinierende, oder auch das Einfache an den beiden Zahlen 0 und 1? Ihre besonderen Eigenschaften in Bezug auf Addition, Multiplikation und Potenz:

- $a{+}0{=}a$
- $0{\cdot}a{=}0$
- $a{\cdot}1{=}a$
- $a^1{=}a$
- $0^a{=}0$, $1^a{=}1$

Demnach gibt es neutrale und konstante Elemente, linksseitig und rechtsseitig. Dies trifft auch auf die Allgemeine Algebra zu.

Neutralelemente

Für ein linksneutrales Element l und ein rechtsneutrales r einer Verknüpfung $*$ gilt:

$$\forall\, a{\in}\mathbb{G}\colon\ l{*}a{=}a{=}a{*}r$$

Da der Index von $\mathit{0}$ 0 und der von $\mathit{1}$ 1 ist, ist (in Bezug auf die die Verknüpfungen definierenden Folgen) $\mathit{0}$ das Rechtsneutrale von $\oplus$, und $\mathit{1}$ das von allen anderen o_n mit $n{>}0$, weil das jeweils direkt definierte Element der Folge (das gleich dem links stehenden Element a ist) diesen Index hat.

$\mathit{0}$ ist ebenso linksneutral zu $\oplus$, denn a-fache Inkrementierung von $\mathit{0}$ aus ergibt genau wieder a; gleichermaßen ist $\mathit{1}$ auch das Linksneutrale von $\otimes$, da auch das zu a-facher Addition von $\mathit{1}$ (also Inkrementierung), und daher zu a zurück führt.

Außerdem ist je das Rechtsneutrale von o_n auch rechtsneutral zur Umkehrung ι_n, da gelten muss:

$$a\iota_n r{=}(a\iota_n r)o_n r{=}a$$

Konstante Elemente

Ein konstantes Element ist mehr oder weniger das Gegenstück zu den Neutralelementen: Egal, mit welchen Elementen verknüpft, ergibt die Verknüpfung stets wieder das konstante Element.

Wenn man bemerkt, dass alle Verknüpfungen o_n mit $n{>}0$ in mehrfacher Verknüpfung des linksstehenden Elements mit sich selbst zu o_{n-1} resultieren (sofern das rechte Element größer als $\mathit{0}$ ist), ist es offensichtlich, dass jedes Neutralelement (egal, ob links- oder rechtsneutral) oder konstante Element von o_{n-1} ebenso linkskonstant zu o_n ist; denn es wird nur mehrfach mit sich selbst verknüpft, was wegen seiner besonderen Eigenschaft wirkungslos bleibt. Dies gilt für alle rechten Elemente größer (ungleich) $\mathit{0}$.

Deshalb ist $\mathit{0}$ auf Grund seiner Neutralität bezüglich $\oplus$ linkskonstant zu $\otimes$, und $\mathit{0}$ (als konstantes Element) wie $\mathit{1}$ (als neutrales) sind linkskonstant zu allen höheren Verknüpfungen (vor allem interessant für die Potenz); aus unserer Erfahrung mit der normalen Arithmetik ist allerdings zusätzlich noch bekannt, dass a^0 ebenso "konstant" 1 ergibt — aber dieser Fall wird hier nicht abgedeckt (sondern später getrennt behandelt werden), da $\mathit{0}$ als rechtes Element ja von den Konstanzüberlegungen ausgeschlossen wurde.

2.3 Highlights

Da eine volle Erläuterung der im Anhang angeführten vollständigen Folgerungen für die Allgemeine Algebra nicht zielführend wäre, werde ich an dieser Stelle nur besonders interessante Tatsachen begründen und erläutern.

2.3.1 Rechengesetze

Über grundlegende Rechengesetze wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz weiß jeder Bescheid, dennoch ist es womöglich gar nicht so leicht, sie zu begründen (da auch oft Definitionsansätze fehlen, um sie daraus herzuleiten). In diesem Abschnitt meiner Arbeit werde ich diese Gesetze auf dem Konzept einer Allgemeinen Algebra aufbauend erläutern.

Addition

Die erste wichtige Feststellung bei der Addition ist es, dass der Nachfolger einer Summe gleich der ursprünglichen Summe ist, bei der *ein* Summand durch seinen Nachfolger ersetzt wurde; gewissermaßen handelt es sich hierbei auch um ein Gesetz, das der Distributivität ähnlich ist:

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon\ ink(a){\oplus}b{=}ink(a{\oplus}b){=}a{\oplus}ink(b)$$

Am formalsten (und meiner Meinung nach auch am einfachsten) zeigt man diese eigentlich einleuchtende Aussage mit Hilfe der beiden Folgen $c_0{=}a,\ c_n{=}ink(c_{n-1})$ und $d_0{=}ink(a),\ d_n{=}ink(d_{n-1})$. Es ist offensichtlich, dass $d_m{=}c_{m+1}$, also die beiden Folgen quasi gegeneinander um ein Element verschoben sind. Dann sind diese Folgerungen problemlos zu erkennen:

$$ink(a){\oplus}b{=}d_{ind(b)}{=}c_{ind(b)+1}{=}ink(c_{ind(b)}){=}ink(a{\oplus}b)$$

$$ink(a{\oplus}b){=}ink(c_{ind(b)}){=}c_{ind(b)+1}{=}c_{ind(ink(b))}{=}a{\oplus}ink(b)$$

Damit kann man relativ einfach zeigen, dass das Kommutativgesetz bei der Addition gilt. Dazu wird ein Beweis durch vollständige Induktion verwendet:

1. Es gilt offensichtlich für $a{=}b{=}\mathit{0}$, da beide Summanden sowieso gleich sind.

2. Wenn es für a und b gilt, gilt es auch für $ink(a)$ und b:

$$ink(a){\oplus}b{=}ink(a{\oplus}b){=}ink(b{\oplus}a){=}b{\oplus}ink(a)$$

Es fällt vielleicht auf, dass hier der Induktionsbegriff etwas gelockert verwendet wird. Denn üblicherweise hat man es mit einer eindimensionalen Folge von Elementen zu tun, bei der ein Element seinen Nachfolger bedingt. In diesem Fall handelt es sich jedoch um eine zweidimensionale Ebene, wobei ein Element immer seinen rechten Nachbarn (nach der Folgerung in Punkt 2) *und* das Element darunter (indem man diese Schritte analog für $ink(b)$ durchführt) indiziert.

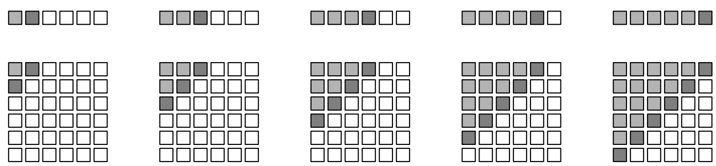


Abb. 1: Vergleich 1d-/2d-Induktion

Es gilt auch das Assoziativgesetz:

$$\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{G}\colon (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Wenn man sich nun die Bedeutung der beiden Ausdrücke vor Augen führt, erkennt man, weshalb das Gleichheitszeichen gelten *muss*:

1. a wird b-mal, und das Ergebnis nochmals c-mal inkrementiert. Letztendlich wird a also $(b \oplus c)$-mal inkrementiert.

2. Hier steht es bereits explizit: a wird $(b \oplus c)$-mal inkrementiert.

Ein genauer Beweis (mit Hilfe von Folgen) ist im Anhang angeführt.

Multiplikation

Bei der Multiplikation $\otimes$ kommt erstmals das Distributivgesetz ins Spiel. Das zeige ich rechts- und linksseitig von einander getrennt.

Die Multiplikation $\otimes$ ist über der Addition $\oplus$ rechtsseitig distributiv:

$$\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{G} \wedge c > \mathit{0}\colon (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

Begründen lässt sich dieses Gesetz, indem man sich die Wirkung von $(a \oplus b) \otimes c$ vorstellt: Das bedeutet nichts anderes, als dass $(a \oplus b)$ c-mal mit sich selbst addiert wird — also eine Summe von Summen. Wie wir bereits wissen, ist die Addition sowohl kommutativ als auch assoziativ, deshalb kann diese Summe so umgeordnet werden, dass eine Summe von der Summe der a und der Summe der b übrig bleibt (von denen jede Summe c Summanden hat), was gleichbedeutend ist mit $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$; mit Folgen kann dies relativ verständlich auch formal gezeigt werden, was im Anhang getan wird.

Beispiel Bei dem Ausdruck (1+2)·3 ergibt sich nach dieser Erklärung:

$$(1+2)\cdot 3=(1+2)+(1+2)+(1+2)=(1+1+1)+(2+2+2)=1\cdot 3+2\cdot 3$$

Steht auf der rechten Seite die Null (was aus der obigen Erläuterung ausgeschlossen werden muss), gilt dieses Gesetz trotzdem, da beide Ergebnisse ihrerseits selbst 0 sind. Dafür muss noch gezeigt werden, dass *0* auch rechtsseitig konstant ist — es sei dazu auf den späteren Abschnitt über die rechtsseitige Null verwiesen.

Ebenso ist $\otimes$ aber auch linksseitig über der Addition distributiv, also insgesamt beidseitig.

$$\forall\, a,\ b,\ c\in\mathbb{G}\colon c\otimes(a\oplus b)=(c\otimes a)\oplus(c\otimes b)$$

Auch diese Multiplikation resultiert in einer Summe (c wird $(a\oplus b)$-mal mit sich selbst addiert), die dem Assoziativgesetz unterliegt. Deshalb lässt sie sich zu einer Summe von zwei Summen zusammenfassen, mit a und b Faktoren — also insgesamt $(c\otimes a)\oplus(c\otimes b)$.

Beispiel Für den Term 5·(2+3) ergibt das:

$$5\cdot(2+3)=5+5+5+5+5=(5+5)+(5+5+5)=5\cdot 2+5\cdot 3$$

Die Multiplikation ist auch kommutativ. Bei der Addition war die "Distributivität der Inkrementierung über der Summe" der Ausschlag gebende Teil des Beweises, bei der Multiplikation ist es die Distributivität über der Summe $(a\oplus 1)$. Der Rest des Beweises, auch die zweidimensionale Induktion, bleibt vollkommen gleich erhalten.

1. Es gilt für $a=b=\mathit{1}$, da $a=b$.

2. Wenn es für a und b gilt, gilt es auch für $(a\oplus 1)$ und b:

   $$(a\oplus 1)\otimes b=(a\otimes b)\oplus(\mathit{1}\otimes b)=(b\otimes a)\oplus(b\otimes\mathit{1})=b\otimes(a\oplus 1)$$

   Dabei werden die Distributivität und die beidseitige Neutralität von *1* ausgenützt.

Wegen der Sonderstellung, die die Null auf der rechten Seite einnimmt, kann die Induktion hier erst bei *1* begonnen werden. Sobald einer dieser beiden Faktoren jedoch *0* ist, egal welcher, ist auch das Ergebnis Null, weshalb die Kommutativität vollständig gilt.

Das Assoziativgesetz lässt sich, wie schon weiter oben bei der Addition, relativ gut erklären, indem man einfach die Bedeutungen der beiden Ausdrücke miteinander vergleicht:

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

In beiden Fällen geht es um die Verknüpfung von a mit sich selbst. Im ersten Fall wird zuerst b-mal verknüpft, das Ergebnis anschließend c-mal; insgesamt ergeben sich also $b \cdot c$ as. Und ebendies ist die direkte Bedeutung des zweiten Ausdrucks.

Diese einfache Überlegung ist legitim, da für die untergeordnete Verknüpfung, die Addition, sowohl Kommutativ- als auch Assoziativgesetz gelten.

Formal wird dieses Gesetz — ähnlich wie die diversen Distributivitäten — am besten allgemein bewiesen, da auf diese Weise auch gleich ein Rechengesetz für Potenzen erklärt werden kann.

Potenz

Unsere Erfahrung sagt uns, dass für die Potenz weder Kommutativ- noch Assoziativgesetz gelten; dafür aber das Distributivgesetz über der Multiplikation. Auch wenn man dieses Kind üblicherweise nicht beim Namen nennt, so ist die Potenz doch rechtsseitig über der Multiplikation distributiv:

$$\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{G} \wedge c > 0\colon (a \otimes b)^c = a^c \otimes b^c$$

Die Begründung ist ganz einfach; denn beim Beweis der Rechtsdistributivität der Multiplikation über der Addition kommt es eigentlich gar nicht auf die beiden Verknüpfungen an, nur darauf, dass es sich um o_n und o_{n-1} handelt, und o_{n-1} kommutativ und assoziativ ist. Dies gilt genauso auch in diesem Fall!

Der Beweis der Linksdistributivität kann allerdings nicht auf diese Weise übernommen werden, da es bei ihm darauf ankommt, dass auf der rechten Seite eine *Summe* steht; allerdings lässt er sich so umformulieren, dass ein anderes Rechengesetz der Potenz gezeigt werden kann:

$$c^{a \oplus b} = c^a \otimes c^b$$

Neben dieser besonderen Form des "Distributivgesetzes" kann auf ähnliche Weise noch die letzte bekannte Regel für das Rechnen mit Potenzen erklärt werden:

$$(c^a)^b = c^{a \otimes b}$$

Denn dieses Gesetz ist, wie bereits weiter oben erwähnt, ein Spezialfall desselben Satzes, der auch die Assoziativität der Multiplikation zu Grunde liegt. Auch eine informelle Erklärung, weshalb dieses Rechengesetz gilt, ist deshalb analog zum Assoziativgesetz der Multiplikation möglich.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Kommutativität bei der Potenz nicht (mehr) gilt. Denn *1* ist einerseits linkskonstant, andererseits aber auch rechtsneutral; deshalb ist $1^a=1$, aber $a^1=a$, was für alle $a>1$ natürlich ein Gegenbeispiel für das Kommutativgesetz darstellt.

Es gilt also meistens, wenn auch nicht immer:

$$a^b \neq b^a$$

Man mag sich nun freilich fragen, was der Grund dafür ist; weshalb versagt der Beweis des Kommutativgesetzes hier, der bei Addition und Multiplikation gelungen ist? Die Antwort darauf ist im letzten Absatz zu finden, nämlich genau die ungleiche Bedeutung von *1* auf der linken und auf der rechten Seite. Denn da für die Induktionsbedingung die Summe $(a \oplus 1)$ potenziert werden muss, führt das eben zu dieser Potenz mit *1* als Teil.

Ein weiteres Problem ist es, dass keine *beid*seitige Distributivität gegenüber der Summe, die ja für die Induktion als Summe erhalten bleiben muss, mehr besteht (auch nicht in abgewandelter Form, wie sie rechtsseitig existiert, was ausreichen würde); auch die "kritische Anormalie" von *1* gründet sich auf die Sonderstellung der Addition (da sie als Neutralelement, und daher als Konstantes der Multiplikation, nicht *1* sondern als einzige Omikron-Verknüpfung *0* hat). Man könnte also sagen, die Potenz (und gleichfalls alle noch höheren Verknüpfungen) sind einfach "zu weit" von der Addition entfernt.

2.3.2 Monotonie-Gesetze

Unter *Monotonie-Gesetzen* verstehe ich hier Gesetze der Form:

$$(a<b) \Leftrightarrow (a*c<b*c) \wedge (a<b) \Leftrightarrow (c*a<c*b)$$

$$(a<b) \Leftrightarrow (a*c>b*c) \wedge (a<b) \Leftrightarrow (c*a<c*b)$$

Es gibt noch zwei weitere Kombinationen, die von mir hier nie benötigt werden. Welche dieser beiden Möglichkeiten zutrifft, hängt von der verwendeten Verknüpfung $*$ ab.

Es ist leicht ersichtlich, dass, falls ein solches Gesetz zutrifft (sogar dann, wenn nur Implikation statt Äquivalenz vorhanden ist), auch gilt:

$$(a*c=b*c) \Leftrightarrow (a=b) \wedge (c*a=c*b) \Leftrightarrow (a=b)$$

Für den Fall $a{=}b$ ist problemlos zu erkennen, dass auch die Verknüpfungen, da stets beide Seiten gleichwertig sind, mit c gleich sein müssen.

Andererseits müssen, wenn die Verknüpfungen gleich sind, auch die beiden einzelnen Variablen gleich sein; denn wären sie es nicht, wären auf Grund des Monotonie-Gesetzes auch die Verknüpfungen größer oder kleiner; dies widerspricht der ursprünglichen Annahme.

In Folge dieses Satzes sind die Monotonie-Gesetze die Grundlage der Algebra, da sie die Anwendung von Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen erlauben.

Addition

Für die Addition gilt die erste Variante des Monotonie-Gesetzes:

$$\forall a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon (a{<}b){\Leftrightarrow}(a{\oplus}c{<}b{\oplus}c){\wedge}(a{<}b){\Leftrightarrow}(c{\oplus}a{<}c{\oplus}b)$$

Um das zu beweisen, müssen wir zuerst erkennen, dass $a{<}b$ **genau dann** gilt, **wenn** ein $d{\in}\mathbb{G}{>}0$ existiert, so dass $a{\oplus}d{=}b$ gilt, was leicht ersichtlich ist.

Beispiel So ist z. B. 2<5 deshalb, weil ein solches d existiert, und 2+3=5 gilt. Der umgekehrte Fall, 5<2, gilt nicht, da zwar 5+−3=2 ist, aber −3 keine natürliche Zahl (und deshalb kein Element von $\mathbb{G}$) ist.

Dann gilt für das erste Viertel des Beweises:

$$(a{\oplus}d{=}b){\Rightarrow}((a{\oplus}c){\oplus}d{=}(a{\oplus}d){\oplus}c{=}b{\oplus}c)$$

Deshalb ist $(a{<}b){\Rightarrow}(a{\oplus}c{<}b{\oplus}c)$, und analog dazu kann gezeigt werden, dass auch aus $a{<}b$ $c{\oplus}a{<}c{\oplus}b$ folgt (da die Addition kommutativ ist).

Mit diesem halben Beweis ist es uns nun schon möglich, den obigen Satz dazu zu verwenden, um aus $(a{\oplus}d){\oplus}c{=}b{\oplus}c$ auf $a{\oplus}d{=}b$ und weiter auf $a{<}b$ zu schließen, was den Beweis vervollständigt.

Höheres

Ebenso gilt dieses Gesetz aber auch für alle anderen Omikron-Verknüpfungen:

$$\forall a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon (a{<}b){\Leftrightarrow}(ao_nc{<}bo_nc){\wedge}(a{<}b){\Leftrightarrow}(co_na{<}co_nb)$$

Dies gilt im ersten Fall, solange c nicht 0 ist, und im zweiten Fall, wenn a und b nicht 0 sind, und c größer als 1 ist.

Eigentlich ist diese Aussage sehr einleuchtend, da einerseits eine größere Variable, wenn sie gleich oft mit sich selbst verknüpft wird, natürlich auch ein größeres Ergebnis erzielen muss (da das Monotonie-Gesetz ja auch für die untere Verknüpfung gilt (Beweis durch vollständige Induktion!)), und andererseits dieselbe Zahl, wenn sie öfter mit sich selbst verknüpft wird, ebenso zu einem größeren Ergebnis führt.

Für den richtigen Beweis wird, wie bereits erwähnt, die Induktion verwendet; die Induktionsbasis bildet bereits das Monotonie-Gesetz für die Addition, die Gültigkeit des Satzes, wenn er für o_{n-1} gilt, wird im Folgenden gezeigt:

Der erste Teil (mit c auf der rechten Seite) ist wiederum mit vollständiger Induktion relativ leicht zu beweisen. Dazu seien zwei Folgen definiert: $(d_1{=}a,\ d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m)$, sowie $(e_1{=}b,\ e_{m+1}{=}bo_{n-1}e_m)$, also $d_{ind(c)}{=}ao_nc$ und $e_{ind(c)}{=}bo_nc$. Dann ist zu zeigen, dass $d_m{<}e_m$ äquivalent zu $a{<}b$ ist:

1. Direkt aus der Definition der Folgen folgt:

$$(d_1{<}e_1)\Leftrightarrow(a{<}b)$$

2. Als Induktionsbedingung gilt:

$$(d_m{<}e_m)\Leftrightarrow(a{<}b)$$

   Genau wenn nun $a{<}b$ (und daher auch $d_m{<}e_m$) gilt, **dann** ist auf Grund des Monotonie-Gesetzes für o_{n-1} sowohl $ao_{n-1}d_m{<}bo_{n-1}d_m$ als auch $bo_{n-1}d_m{<}bo_{n-1}e_m$ (diese beiden Aussagen sind wegen der Induktionsbedingung äquivalent) — daher gilt allgemein:

$$(a{<}b)\Leftrightarrow(ao_{n-1}d_m{<}bo_{n-1}e_m)\Leftrightarrow(d_{m+1}{<}e_{m+1})$$

Der zweite Teil (mit c auf der linken Seite) kann ebenso erklärt werden. Dazu wird eine neue Folge benötigt: $(f_1{=}c,\ f_{m+1}{=}co_{n-1}f_m)$; daher ist $f_{ind(z)}{=}co_nz$. Nun gilt für zwei auf einander folgende Glieder dieser Folge:

$$(f_m{<}f_{m+1})\Leftrightarrow(f_m{<}co_{n-1}f_m)$$

Wie später erklärt wird, ist diese Aussage wahr. Nun ist jedes Folgeglied kleiner als sein Nachfolger, und daher ist auch jedes Folgeglied kleiner als alle späteren; so gilt schließlich:

$$(f_{ind(a)}{<}f_{ind(b)})\Leftrightarrow(ind(a){<}ind(b))\Leftrightarrow(a{<}b)$$

Nun bin ich noch die Erklärung dafür schuldig, weshalb $f_m < c o_{n-1} f_m$ ist; dazu sei $d := f_m$. Nun führt $c o_{n-1} d$ zur d-fachen Verknüpfung von c mit sich selbst zu o_{n-2}; bei jedem dieser Schritte wird das Ergebnis wenigstens um *1* größer, also ist das Gesamtergebnis größer als d, wenn c größer als *1* ist, weil d auch nur die $(d-1)$-fache Addition von *1* zu *1* ist. Ein genauerer Beweis ist im Anhang zu finden.

Umkehrungen

Auch für die beiden Umkehrverknüpfungen ι_n und ν_n von o_n gelten Monotoniegesetze (der zweite Typ). Dies kann gezeigt werden, obwohl diese Verknüpfungen ja nicht einmal exakt definiert wurden! Alles, was im Folgenden für ι_n erklärt wird, gilt analog auch für ν_n.

Es gilt dann, wenn die Zahlenwerte die Bedingungen für die Monotoniegesetze von o_n mit ihren diversen Einschränkungen erfüllen.

Für den ersten Fall gilt:

$$(a\iota_n c < b\iota_n c) \Leftrightarrow ((a\iota_n c)o_n c < (b\iota_n c)o_n c) \Leftrightarrow (a < b)$$

$$(a\nu_n c < b\nu_n c) \Leftrightarrow (a < b)$$

Wenn die beiden Variablen a und b rechtsseitig auftreten, gilt:

$$(c\iota_n a = c\iota_n b) \Leftrightarrow (a = b) \wedge (c\nu_n a = c\nu_n b) \Leftrightarrow (a = b)$$

Denn es gilt natürlich:

$$(c = c) \Leftrightarrow ((c\iota_n a)o_n a = (c\iota_n b)o_n b) \Leftrightarrow wahr$$

Wegen der Monotonie von o_n ist es nun klar, dass die beiden rechten Seiten gleich sein müssen, wenn es die beiden linken sind, und das natürlich auch umgekehrt gilt.

Schließlich gilt hier natürlich auch noch die andere Hälfte des Monotonie-Gesetzes:

$$(c\iota_n a < c\iota_n b) \Leftrightarrow (a > b) \wedge (c\nu_n a < c\nu_n b) \Leftrightarrow (a > b)$$

Wenn $a < b$ **und** gleichzeitig $c\iota_n a < c\iota_n b$ wäre, so wäre erst recht $(c\iota_n a)o_n a < (c\iota_n b)o_n b$, und daher $c < c$, was offensichtlich falsch ist. Da das ebenso für die Relation $>$ gilt, muss **genau eine** dieser ersten Relationen wahr sein; da aber auch $=$ wegen des letzten Satzes vollkommen auszuschließen ist, gilt die obige Annahme.

2.3.3 Rechtsseitige Null

Betrachten wir die Definition der Verknüpfungen über der Addition:

$$\forall\, a,\ b\in\mathbb{G}\colon (d_1{=}a,\ d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m)\Rightarrow ao_nb{=}d_{ind(b)}$$

Bei genauer Analyse stellt sich möglicherweise die Frage, was für ein Ergebnis bei rechtsseitiger Verknüpfung mit *0* zu erwarten ist. Denn im Grunde beginnt diese rekursiv definierte Folge erst beim Index 1, oder etwa nicht? Wie auch immer man das nennen mag, Satz, Definition oder Ausnutzung einer Ungenauigkeit, die Lösung liegt im zweiten Teil der Folgendefinition ($d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m$), der nichts anderes besagt, als dass jedes Folgeglied aus dem vorherigen gebildet wird, indem man es rechtsseitig mit a zu o_{n-1} verknüpft. Wendet man diese Aussage auch auf $d_1{=}a$ an, erhält man die Gleichung:

$$a{=}ao_{n-1}d_0$$

Da ich bereits gezeigt habe, dass, abhängig von der Verknüpfung, entweder *0* oder *1* das Rechtsneutrale dieser Operation ist (es also existiert), kann man die Gleichung weiter umformen:

$$ao_{n-1}r{=}ao_{n-1}d_0$$

Mit Hilfe des weiter oben gezeigten Monotoniegesetzes lässt sich diese Gleichung für den Fall $a{>}1$ auflösen (da auch entweder $r{=}1$, also ungleich 0, oder die Verknüpfung $\oplus$ ist, das Gesetz also gilt) zu:

$$d_0{=}r$$

Für die Fälle $a{=}1$ und $a{=}0$ kann so keine Aussage gemacht werden; deshalb sind 0^0 und 1^0 undefiniert. Denn auf Grund der Linkskonstanz dieser beiden Zahlen ist die Gleichung für jedes beliebige d_0 erfüllt.

Handelt es sich jedoch bei der untergeordneten Verknüpfung um die Addition (es geht also um die Multiplikation mit *0*), so entfallen diese Einschränkungen, weil bei der Addition keinerlei "Sonderfälle" wie konstante Elemente oder mögliche Undefiniertheiten beim Auflösen der Gleichung stören; (rechtsseitige) Multiplikation mit Null ergibt somit stets *0*, die Null ist also auch *rechts*konstant zur Multiplikation.

2.4 Negative Zahlen

Bisher habe ich mich nur mit Erklärungen für die *natürlichen* Zahlen beschäftigt, da sie gewissermaßen die Grundlage des gesamten Zahlensystems bilden. Dabei existiert jedoch das Problem, dass die Umkehrverknüpfungen (und in diesem Abschnitt im Speziellen *dek* und $\ominus$) nicht für alle natürlichen Operanden definiert sind, die Grundmenge $\mathbb{G}$ einer Allgemeinen Algebra also in Bezug auf die vorher definierten Verknüpfungen nicht abgeschlossen ist; und dann stellt sich die Frage danach, welche Zahlen nun wirklich, wenn sie auch nicht aus $\mathbb{G}$ sind, das Ergebnis von Operationen wie $dek(\mathit{0})$ sind. Das führt schließlich zu den *negativen Zahlen*, die zusammen mit $\mathbb{G}$ die *ganzen Zahlen* $\mathbb{G}_0$ bilden. Der Index 0 weist darauf hin, dass in dieser Menge die Umkehrfunktionen mit dem Index 0 (also $\ominus$) möglich sind.

2.4.1 Definition

Praktisch analog zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{G}$ ergeben sich die negativen Zahlen, indem man von der Null ausgehend iterativ die Funktion *dek* aufruft. Die Menge $\mathbb{G}_0$ ist anschließend die Vereinigung dieser neuen Zahlen mit $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G}_0 := \mathbb{G} \cup \{y_n |\ z_0 = \mathit{0},\ y_{n+1} = dek(y_n)\}$$

Ordnet man nun ihrem Index nach jeder natürlichen Zahl aus $\mathbb{G}$ ein Folgeglied dieser Folge y zu, hat man eine mögliche Schreibweise für die negativen Zahlen. Für ein $a \in \mathbb{G}$ sei die dazugehörige negative Zahl:

$$(-a) := y_{ind(a)}$$

Außerdem muss noch festgelegt werden, dass *ink* (und damit auch *dek*) auch im Bereich der negativen Zahlen eindeutig umkehrbar (bijektiv) sind, wie es für $\mathbb{G}$ gilt.

Durch diese Definition werden die negativen Zahlen sehr gut ins System der Allgemeinen Algebra eingepasst, da die Iteration mit *ink* erhalten bleibt, auch wenn sie von einer negativen Zahl aus begonnen wird. Ebenso bleiben die ersten beiden Axiome erhalten, wenn man die Allgemeine Algebra auf die Menge $\mathbb{G}_0$ ausweitet; und zwar sogar für *ink und dek*, da diese beiden Funktionen ja bijektiv sind, und deshalb praktisch jede Aussage von der einen auf die andere übertragen werden kann:

1. Wird *ink* auf eine negative Zahl y_n angewendet, ergibt sich das vorherige Folgeglied y_{n-1} und vielleicht bereits die Null; das Ergebnis ist also sicherlich ein Element von $\mathbb{G}_0$.

Auch muss das Ergebnis von *dek* vom Argument verschieden sein, da einerseits $dek(0)=(-1)\neq 0$ gilt, aber deshalb andererseits auch $dek((-1))$ ein anderes Ergebnis liefern muss, wenn die Funktion bijektiv bleiben soll! Denn wenn sowohl *0* als auch (-1) zum Ergebnis (-1) führen würden, wäre die Umkehrung nicht mehr eindeutig. Mit vollständiger Induktion kann das nun auf diese Weise bis ins Unendliche fortgesetzt werden.

2. Für das zweite Axiom, die Forderung, dass man **entweder** c von d aus, **oder** umgekehrt erreicht, kommt eine ähnliche Überlegung ins Spiel. Denn mit der Funktion *dek* kommt man — auf Grund ihrer Definition — sicher zu jeder beliebigen negativen Zahl. Würde man jedoch irgendwann wieder zu einer bereits erreichten kommen, wäre diese wiederum das Ergebnis von *dek* für zwei verschiedene Argumente, was gegen die Bijektivität dieser Funktion sprechen würde.

2.4.2 Verknüpfungen mit negativen Zahlen

Nachdem nun die negativen Zahlen eingeführt sind, ist es aber noch unklar, welches Ergebnis Verknüpfungen (o_n, ι_n, ν_n) mit negativen Zahlen haben; denn diese Verknüpfungen sind einerseits bis jetzt nur für Elemente aus $\mathbb{G}$ definiert, und andererseits mag man sich fragen, was es eigentlich bedeutet, wenn ein a z. B. (-1)-mal mit sich selbst verknüpft wird!

Für diejenigen Fälle, die keine größeren Schwierigkeiten machen (wenn eine negative Zahl auf der linken Seite steht), wird dieselbe Definition übernommen und ausgeweitet; also genauso wie natürliche Zahlen werden auch negative Operanden einfach mehrfach mit sich selbst verknüpft, oder es wird *ink* mehrfach angewendet. Ebenso werden auch die Umkehrfunktionen ohne Weiteres definiert, auch hier gilt dieselbe Definition nun auch für negative Zahlen.

Weiterführende Überlegungen sind nur dazu nötig, um die Bedeutung der Omikron-Verknüpfung zu definieren, wenn negative Zahlen auf der rechten Seite vorkommen. Denn wie bereits erwähnt, ist es intuitiv wohl schwer zu sagen, "wie oft" eine negative Anzahl ist. Trotzdem kann man mit etwas Überlegung eine befriedigende Lösung für dieses Problem finden; denn der Sachverhalt ist ähnlich wie bei rechtsseitiger Verknüpfung mit *0*.

Man muss sich die dort zitierte Folge, nach der die Omikron-Verknüpfung definiert ist, nach links nicht nur bis zur Null, sondern auch in den negativen Bereich fortgesetzt denken. In diesem Teil muss man sogar noch eine natürliche Zahl hinzuverknüpfen, um zum Nullpunkt der Folge, also dem Neutralelement *0* oder *1* oder im Fall der Addition zur Ausgangszahl, zurückzukommen.

So ergibt sich als formale Definition:

$$a \oplus (-b) \oplus b := a$$

$$(a o_n (-b)) o_{n-1} (a o_n b) := r(o_{n-1})$$

Im folgenden Abschnitt werde ich die Auswirkungen dieser Definition an Hand unserer Erfahrungen mit negativen Summanden, Faktoren und Exponenten weiter erklären.

2.4.3 Unsere Erfahrung

Addition wird zur Subtraktion

Von der obigen Definition der Addition ausgehend ist leicht eine Ähnlichkeit mit der Definition der Subtraktion zu erkennen, denn es gilt:

$$(a \oplus (-b)) \oplus b = a = (a \ominus b) \oplus b$$

Deshalb ist die Addition einer negativen Zahl gleichbedeutend mit der Subtraktion ihres positiven Äquivalents, was auch unserer Erfahrung entspricht.

Negative Exponenten

Unserer Erfahrung nach ist der Wert einer Potenz mit negativem Exponenten gleich dem Kehrwert derselben Potenz mit positivem Exponenten:

$$a^{(-b)} = \frac{1}{a^b}$$

Das ist genau derselbe Effekt, wie er durch meine Definition aus dem vorherigen Abschnitt erreicht wird. Denn diese besagt für den speziellen Fall der Potenz als o_n nichts anderes als:

$$a^{(-b)} \otimes a^b = \mathit{1}$$

Es ist leicht zu erkennen, dass diese beiden Gleichungen vollkommen äquivalent sind. Obwohl diese Potenz für ganze Zahlen nie eine andere ganze Zahl ergibt, die Potenz mit negativen Exponenten in $\mathbb{G}_0$ also gar nicht definiert ist, deckt sich meine Definition mit der üblichen Vorgangsweise; sie kann also für spätere Ausweitungen der Zahlenmengen problemlos erhalten bleiben.

Multiplikation mit negativen Zahlen

Für die Multiplikation mit negativen Faktoren sind diese drei Regeln allgemein bekannt:

1. $(-a) \cdot b = (-(a \cdot b))$
2. $a \cdot (-b) = (-(a \cdot b))$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Vor allem die letzte Regel ist vielleicht auf den ersten Blick nicht leicht erklärbar und doch sehr folgenschwer, da letztendlich dieses Gesetz für die Nötigkeit von solch unwirklich erscheinenden Gebilden wie der komplexen Zahlen zuständig ist. Denn dadurch, dass das Quadrat einer Zahl *immer* positiv ist (auch dann, wenn sie selbst negativ ist), ist die Quadratwurzel aus negativen Zahlen im reellen Zahlenbereich undefiniert, und man muss die komplexen Zahlen einführen.

Die erste Regel ist eigentlich eine Anwendung der Überlegungen zur Addition von negativen Zahlen. Denn $(-a)$ wird mehrfach zu sich selbst addiert, oder aber a mehrfach davon abgezogen. Deshalb ergibt sich natürlich das negative Äquivalent zu $a \cdot b$.

Die anderen beiden Rechengesetze sind eine Anwendung der Definitionen des letzten Abschnittes. Danach ergibt sich nämlich ein Äquivalent der zweiten Regel:

$$(a \otimes (-b)) \oplus (a \otimes b) = \mathit{0}$$

Analog ergibt sich das dritte Gesetz:

$$((-a) \otimes (-b)) \oplus ((-a) \otimes b) = ((-a) \otimes (-b)) \oplus (-(a \otimes b)) = ((-a) \otimes (-b)) \ominus (a \otimes b) = \mathit{0}$$

Was schließlich zu diesem gravierenden Endergebnis führt:

$$(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$$

Kapitel 3

Die Peano-Axiome im Vergleich

Ein Ansatz, der zu meiner Allgemeinen Algebra ähnlich ist, wurde 1889 vom italienischen Mathematiker **Giuseppe Peano** angegeben. In diesem Kapitel werde ich dessen und darauf beruhende Ansätze darlegen, und einen Vergleich mit meinem eigenen erarbeiten.

3.1 Die Axiome von Peano

Peano formulierte diese Axiome, die nach ihm als *Peano-Axiome*[1] bezeichnet werden:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen *Nachfolger* n', der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.
4. Zwei verschiedene natürliche Zahlen n und m besitzen stets verschiedene Nachfolger n' und m'.
5. Enthält eine Menge X die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch stets deren Nachfolger n', so enthält X bereits alle natürlichen Zahlen. (Ist X dabei selbst eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, dann ist X gleich der Menge der natürlichen Zahlen.)

3.1.1 Das Induktionsaxiom

Das etwas seltsam anmutende fünfte Axiom ist das *Induktionsaxiom*, es bildet die Grundlage für das Beweisen durch vollständige Induktion. Dieses Beweisverfahren beruht ja genau

[1] Wikipedia: Natürliche Zahl. (9. 2. 2006).
http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Zahl
(11. 2. 2006).

auf der Tatsache, dass eine Eigenschaft für **alle** natürlichen Zahlen gilt, sofern sie für Null gilt, und sie aber auch von jeder Zahl besessen wird, für deren Vorgänger sie gilt.

Allerdings wird die Semantik der "Eigenschaft" hier durch Zugehörigkeit zu einer bestimmten Menge X ausgedrückt, was zur "mathematischeren" Formulierung dient. X ist dabei quasi die Menge all jener Zahlen, für die die Eigenschaft erfüllt ist.

Vielleicht nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist, dass dieses Axiom auch wirklich zur Definition der natürlichen Zahlen *nötig* ist (und nicht nur, damit der Beweis durch Induktion erlaubt ist). Denn sonst wäre auch ein Modell mit **zwei verschiedenen** "Gruppen" von Zahlen, die **in sich geschlossen** sind, möglich!

Beispiel Betrachten wir die Menge der **ganzen** Zahlen, wobei der Nachfolger einer Zahl *dem Betrag nach* um eins größer als die ursprüngliche Zahl sei und dasselbe Vorzeichen wie diese habe. Interessant wird es dabei nur für die negativen Zahlen:

- $0'=1$
- $5'=6$
- $(-1)'=(-2)$

Ich behaupte nun, dieses System genügt den Peano-Axiomen, wenn das Induktionsaxiom fehlt (sofern wir unter "natürliche Zahl" hier ein Element jener Menge, also eigentlich eine ganze Zahl, verstehen):

1. 0 ist weiterhin eine natürliche Zahl.
2. Der Nachfolger bleibt eindeutig bestimmt, und ist auch stets eine natürliche Zahl.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist; das gilt hier übrigens auch für (-1), was dem Axiom aber nicht widerspricht.
4. Zwei verschiedene Zahlen, die denselben Betrag haben, haben zwar auch Nachfolger, die *im Betrag* übereinstimmen, jedoch sind die Nachfolger stets zumindest im Vorzeichen verschieden.

Das Induktionsaxiom ist jedoch nicht erfüllt, da z. B. die eigentliche Menge der natürlichen Zahlen (die genau aus 0 und allen Nachfolgern besteht) die Zahl (-1) und alle *ihre* Nachfolger (also die negativen ganzen Zahlen) **nicht** enthält!

3.1.2 Vergleich mit der Allgemeinen Algebra

Es ist relativ leicht ersichtlich, dass **Peano**s Axiome im Grunde genau dasselbe aussagen wie meine Allgemeine Algebra. Da die Axiome dennoch nicht auf den ersten Blick als vollkommen äquivalent erscheinen, werde ich die Unterschiede bzw. Zusammenhänge im Folgenden erklären. Dabei sind die beiden Schreibweisen $ink(n)$ und n' für den Nachfolger einer Zahl gleichbedeutend, sie werden nur dem Kontext entsprechend verwendet.

In der unten stehenden Tabelle leite ich jedes Axiom beider Systeme aus dem jeweils anderen System her. Dabei steht die zu beweisende Aussage in der linken Spalte, während die Herleitung rechts daneben zu finden ist.

Peano-Axiome	**Allgemeine Algebra**
0 ist eine natürliche Zahl.	Hierzu ist nur zu beweisen, dass meine Menge $\mathbb{G}$ nicht leer ist (da für 0 noch keine weiteren Bedingungen gefordert werden). Dies folgt aus meinem 3. Axiom, da dort die Existenz eines bestimmten Elements gefordert wird; die zusätzlichen Bedingungen ignorierend wissen wir daraus, dass $\mathbb{G}$ mindestens ein Element besitzen muss.
Es gibt zu jeder natürlichen Zahl n einen eindeutigen Nachfolger n', der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.	Da der Nachfolger bei mir als Ergebnis einer Funktion definiert ist, die als solche eindeutige Werte liefern muss, ist es sichergestellt, dass $ink(n)$ eindeutig ist (und deshalb zu einer Zahl **höchstens** ein Nachfolger existiert). Allerdings hat auch *jede* Zahl a aus $\mathbb{G}$ nach meinem 1. Axiom einen Nachfolger, der selbst aus $\mathbb{G}$ stammt.
Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.	Mein 3. Axiom fordert, dass eine solche Zahl existiert; die Bezeichnung mit “Null” dient nur der Übersichtlichkeit und folgt bei mir später.

Die Nachfolger zweier verschiedener Zahlen sind stets auch verschieden.	Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Zahlen a und b, deren *gemeinsamer* Nachfolger c wäre. Man käme nun durch Iteration mit ink von einer der beiden Zahlen aus im ersten Iterationsschritt zu c, nach meinem 2. Axiom dürfte man also von c weder zu a noch b zurück kommen; deshalb käme man auch **weder** von a nach b, **noch** von b nach a, was ebendiesem Axiom widerspricht.
Enthält eine Menge X die Zahl 0 und mit jeder Zahl n auch n', so enthält X alle natürlichen Zahlen.	Nach meinem 2. Axiom kommt man durch iterative Bildung des Nachfolgers für jedes Paar natürlicher Zahlen von einer der beiden zur anderen; für den Fall, dass eine der beiden Zahlen 0 ist, kommt man demnach von 0 zu jeder anderen natürlichen Zahl (da man nicht zu Null kommen kann). Folglich erreicht man *jede* natürliche Zahl, indem man iterativ von 0 ausgehend den Nachfolger bildet.

Allgemeine Algebra	**Peano-Axiome**
Wenn a ein Element von $\mathbb{G}$ ist, gehört auch $ink(a)$ dieser Menge an; außerdem ist in diesem Fall $ink(a) \neq a$.	Nach **Peano**s 2. Axiom muss der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ebenfalls eine natürliche Zahl sein. Zudem ist $0' \neq 0$ (3. Axiom!); wenn $n' \neq n$ gilt, muss auch $n'' \neq n'$ gelten, da n' sonst im Widerspruch zum 2. Axiom der Nachfolger der beiden *verschiedenen* Zahlen n und n' wäre! Damit ist auch der zweite Teil meines Axioms durch Induktion bewiesen.

Für alle von einander verschiedenen zwei Zahlen $a,\ b \in \mathbb{G}$ erreicht man durch Iteration mit *ink* **entweder** b von a aus, **oder** umgekehrt.	Aus **Peano**s Induktionsaxiom wissen wir, dass man, wenn man von 0 ausgehend iterativ den Nachfolger bildet, alle natürlichen Zahlen, also auch a und b erhält; eine dieser beiden Zahlen muss dabei zuerst auftreten (da der Nachfolger ja eindeutig ist), und von dieser Zahl "kommt" man dann folglich zur anderen. Wenn man nun von dieser Zahl aus weiter iteriert, kann man sicher nicht mehr zu 0 zurück kommen, da diese Zahl nach dem 3. Axiom nicht als Nachfolger einer natürlichen Zahl auftreten kann. Man kann aber auch keine andere frühere Zahl wieder erreichen, da diese Zahl sonst der gemeinsame Nachfolger zweier verschiedener Zahlen wäre, was Axiom 4 widerspricht. Daher kann man auch nicht mehr zur ersten der beiden Zahlen zurück kommen!
Es gibt mindestens eine Zahl in $\mathbb{G}$, die nicht als Nachfolger eines anderen Elements dieser Menge auftreten kann.	Das 3. Axiom von **Peano** nennt eine solche Zahl beim Namen, daher muss sie existieren.

Tab. 1: Gegenseitige Ableitung der beiden Axiomensysteme aus dem jeweils anderen

Grob verallgemeinert lässt sich sagen, dass mein 1. Axiom dem 2. von **Peano** entspricht, mein 3. seinem 3., und mein 2. der Kombination aus seinem 4. und 5. Axiom. Sein 1. Axiom ist eigentlich nur die "Benennung der Null" und stellt keine großen Forderungen, weshalb ich keine direkte Entsprechung in meinem Axiomensystem habe.

3.2 Rekursive Definition von Operatoren

In Zusammenhang mit den Peano-Axiomen können die Verknüpfungen Addition und Multiplikation rekursiv definiert[2] werden:

$$n{+}0{=}n,\ \ n{+}m'{=}(n{+}m)'$$

$$n{\cdot}0{=}0,\ \ n{\cdot}m'{=}(n{\cdot}m){+}n$$

Eine analoge Definition ist natürlich auch für die Potenz möglich:

$$n^0{=}1,\ \ n^{m'}{=}n^m{\cdot}n$$

Auf diese Weise können die Operatoren sehr elegant (mit einer sehr kurzen Definition) für alle natürlichen Zahlen definiert werden.

3.2.1 Omikronverknüpfungen

Meine Omikron-Verknüpfungen sind dieser Definition sehr ähnlich. Denn prinzipiell führen beide Definitionen einfach dazu, dass die Multiplikation eine mehrfache Addition, und die Potenz eine mehrfache Multiplikation erzeugt.

Es gibt einige Unterschiede, auf die ich später zurück kommen werde, da sie vorerst ignoriert werden können.

Aber auch einfach formal betrachtet besteht jedoch sehr wohl ein gewisser Unterschied, da die Formulierungen der Beweise auf den jeweiligen Systemen aufbauend natürlich ganz unterschiedlich ausfallen.

Ähnlichkeiten

Es ist interessant festzustellen, dass die oben genannten rekursiven Definitionen der Verknüpfungen als Gesetze auch "wörtlich" für die Omikron-Verknüpfungen gelten; denn diese "Distributivitätsgesetze" habe ich in genau dieser Form weiter oben bereits bewiesen.

Für die Addition hatte ich die "Distributivität der Inkrementierung über der Summe" bewiesen, um daraus später die Kommutativität herleiten zu können:

$$ink(a){\oplus}b{=}ink(a{\oplus}b){=}a{\oplus}ink(b)$$

[2] Ebda.

Der erste Teil ist hier überflüssig, und der Rest kann anders geschrieben werden als:

$$(n+m)'=n+m'$$

Für die anderen Fälle (Multiplikation, Potenz) habe ich je linksseitige Distributivität der jeweiligen Verknüpfung über der Addition bewiesen; setzt man im Speziellen einen Summanden gleich 1 (also eine Inkrementierung), so ergeben sich die obigen Definitionen.

Zusätzlich muss man dazu noch die Rechtsneutralität der Elemente 0 für die Addition und 1 für Multiplikation und Potenz bestätigen; auch diese Sätze habe ich weiter oben bereits bewiesen. Bis auf die im nächsten Abschnitt geschilderten kleineren Unterschiede sind die beiden Systeme gleichwertig.

Unterschiede

Ein Unterschied der beiden Systeme besteht jedoch darin, dass die obige Definition die mehrfache Verknüpfung, die durch die Multiplikation bzw. Potenz entsteht, von links nach rechts auswertet, während die Omikron-Verknüpfungen die Abarbeitung von rechts nach links fordern.

Beispiel So ergeben sich bei der Potenz 5^3 diese beiden Varianten:

$$5^3=(5\cdot 5)\cdot 5$$

$$5^3=5\cdot(5\cdot 5)$$

Bei Multiplikation und Potenz fällt dies nicht ins Gewicht, da Addition und Multiplikation ja sowohl kommutativ als auch assoziativ sind; für die "höheren" Omikron-Verknüpfungen ist dieses Detail sehr wohl wichtig. Deshalb wurde diese Reihenfolge von mir bewusst gewählt.

Die zweite Abweichung von meinen Omikron-Verknüpfungen ergibt sich dadurch, dass Multiplikation bzw. Potenz mit rechtsseitiger Null explizit definiert wird, wobei ich die eigentliche Definition erst bei der Eins beginne, und das Verhalten für Null herleite (wobei die Potenzen 0^0 und streng genommen auch 1^0 undefiniert bleiben).

Der Grund dafür, dass ich diese Definition gewählt habe, liegt darin, dass diese Definition meiner Meinung nach "intuitiv nachvollziehbar" sein soll; und ich denke, es ist jedem klar, was "a 'mal' 1" bedeutet, wobei "a 'mal' 0" nicht so leicht nachvollziehbar ist!

3.3 Modelle für die natürlichen Zahlen

Obwohl alle möglichen Modelle, also konkrete Definitionen, der (natürlichen) Zahlen, die den Peano-Axiomen und auch der Allgemeinen Algebra genügen, mehr oder weniger "identisch" sind (es gibt für je zwei eine bijektive Abbildung, die sie in einander überführt), gibt es viele Möglichkeiten, ein solches Modell zu erstellen.

In diesem Abschnitt möchte ich ein paar Vorschläge dazu vorstellen.

3.3.1 Zahlen als Mengen

Ein konkretes Modell der natürlichen Zahlen[3], das sowohl den Peano-Axiomen als auch der Allgemeinen Algebra genügt, lässt sich allein auf die Mengenlehre aufbauend erstellen. Dabei setzt man:

$$0{:=}\emptyset$$

$$n'{:=}n\cup\{n\}$$

Hierbei ist es sehr wichtig, den Unterschied zwischen einer Menge und einem Element einer Menge zu verstehen; auch wenn eine Menge andere Mengen als Elemente enthält, besteht die Menge aus ihren eigenen Elementen und nicht aus den Elementen ihrer Elemente.

Beispiel

$$A{=}\{2,\ 11,\ 2006\}$$

$$B{=}\{A\}{=}\{\{2,\ 11,\ 2006\}\}$$

Die Menge A enthält die drei Zahlen 2, 11 und 2006; die Menge B dagegen *enthält* die Menge A — das ist etwas anderes, als wenn sie jene drei Zahlen enthalten würde, also *gleich* der Menge A wäre!

Konkret ergibt sich für die ersten natürlichen Zahlen:

$$0{=}\{\}{=}\emptyset$$

$$1{=}\{0\}{=}\{\emptyset\}$$

[3] Ebda.

$$2=\{0,\ 1\}=\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$$

$$3=\{0,\ 1,\ 2\}=\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$$

$$4=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}=\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}\}$$

Eine Zahl a ist also die Menge all jener Zahlen, die kleiner als a sind. So ist auch die Operation $b<a$ äquivalent mit $b\in a$; insgesamt ergibt sich so ein Modell, das nur auf grundlegenden mengentheoretischen Forderungen beruht.

3.3.2 Noten als Zahlen

Eine etwas ungewöhnliche, aber durchaus legitime Anwendung der Allgemeinen Algebra ist es, musikalische Noten als "Zahlen" zu definieren. Ich schlage dazu dieses System vor:

- Als *0* wird F definiert. Dies ist eine rein willkürliche Wahl.
- $ink(a)$ bedeutet, a um eine Quinte anzuheben.

Ich definiere das F als Grundton (nicht das C), da auf diese Weise die vorzeichenlosen Töne der C-Dur-Tonleiter die Indizes 0 bis 6 erhalten.

Wenn man noch die negativen Zahlen dazunimmt und den Unterschied zwischen gleichen Noten in verschiedenen Oktaven ignoriert, werden auf diese Weise alle Töne definiert, und es bleibt auch der beliebte Satz "Cis und Des klingen gleich, sind aber nicht dieselben Noten" richtig!

In der folgenden Tabelle sind diese Entsprechungen zwischen Note und Zahl (den dazugehörigen Indizes) angeführt; ich verzichte auf die korrekten Oktavenbezeichnungen, da diese wie weiter oben erwähnt für mein System nicht relevant sind:

Note	**Index**	**Eine Quint tiefer**	**Eine Quint höher**
C	1	F	G
D	3	G	A
E	5	A	H
F	0	B	C
Fis	7	H	Cis
G	2	C	D
A	4	D	E

H	6	E	Fis
B	-1	Es	F

Tab. 2: Zuordnungen zwischen Noten und Zahlen

Natürlich sind auf diese Noten auch die Verknüpfungen definiert und machen auch einen gewissen Sinn: So wird die Note x, wenn sie von der Tonart y-Dur nach z-Dur transponiert wird, zu $x \oplus (z \ominus y)$.

Beispiel Wird das H von C-Dur nach G-Dur transponiert, ergibt sich ein Fis: 6+(2−1)=7.

Das C wird bei Transposition von G-Dur nach F-Dur zu B: 1+(0−2)=−1.

Kapitel 4

Über das Höhere und seine Umkehrung

Im folgenden Kapitel werde ich mich näher mit den von mir quasi neu eingeführten Verknüpfungen "über" der Potenz und ihren Umkehrungsfunktionen befassen.

Dabei werde ich nur mehr überblicksmäßig vorgehen und nicht mehr viel Wert auf formal vollständige Definitionen und Beweise legen; auch gehe ich davon aus, dass die Verknüpfungen der Allgemeinen Algebra bereits nach Vorbild unserer gewöhnlichen Arithmetik auf die gesamten reellen Zahlen ausgeweitet wurden, bzw. im Weiteren, wo es erforderlich ist, als so betrachtet werden. Deshalb werde ich auch gegebenenfalls die für uns übliche Notation für Konstrukte wie Brüche oder Wurzeln verwenden, um das Verständnis zu erleichtern.

4.1 Die Hyperpotenz

Als Beispiel für die Neuerungen werde ich als einfachste Möglichkeit die *Hyperpotenz* verwenden; dabei handelt es sich um die Verknüpfung o_3. Analog dazu ist ι_3 die *Hyperwurzel.*

Es gilt somit allgemein:

- $x o_3 2 = x^x$
- $x o_3 3 = x^{x^x}$
- ...

Und natürlich auch:

- $x^x \iota_3 2 = x$
- $x^{x^x} \iota_3 3 = x$
- ...

Beispiel Ein konkretes Beispiel ist:

$$2o_3 3{=}2^{2^2}{=}2^4{=}16$$

Deshalb ist anders herum $16\iota_3 3{=}2$.

Um die Gleichung $x^x = 27$ nach x aufzulösen, wird ebenfalls die Hyperwurzel benötigt. Die korrekte Lösung 3 erhält man durch Ziehen dieser Wurzel; denn $3^3{=}27$.

4.2 Ziehen von Hyperwurzeln

Um Lösungen von Gleichungen wie im letzten Abschnitt finden zu können, muss es möglich sein, die Hyperwurzeln aus beliebigen Zahlen ziehen zu können. Zwei mögliche Verfahren, um das numerisch durchzuführen, sind die Intervallschachtelung und die Verallgemeinerung des Babylonischen Wurzelziehens.

4.2.1 Intervallschachtelung

Bei der *Intervallschachtelung* sucht man eine Lösung, indem man zuerst durch Probieren eine obere und eine untere Grenze findet (da die Monotoniegesetze gelten ist dies einfach möglich), und den möglichen Bereich dazwischen anschließend immer weiter einschränkt. Sobald man eine genügende Genauigkeit (Differenz zwischen Ober- und Untergrenze) erreicht hat, kann man einen Wert dazwischen als gute Näherung der gesuchten Wurzel verwenden.

Eine mögliche konkrete Realisierung dieses Verfahrens könnte in C-ähnlichem Pseudo-Code für die Hyper*quadrat*wurzel so geschrieben werden:

```
zahl hyperWurzel(zahl z)
{
 zahl unten, oben;

 /* Untere Grenze finden, indem mit 1 begonnen wird, und wir
    so lange halbieren, bis der Wert sicher kleiner ist. */

 unten=1;
 while(unten hoch unten >z)
  unten/=2;
 if(unten hoch unten ==z) return unten;
```

```
 /* Obere Grenze analog dazu. */

 oben=1;
 while(oben hoch oben <z)
  oben*=2;
 if(oben hoch oben ==z) return oben;

 /* Nun das Intervall immer halbieren, bis die Toleranz
    unterschritten wird. */

 while(oben-unten>einSehrKleinerWert)
 {
  zahl mitte=(unten+oben)/2;

  /* Ist die Mitte größer oder kleiner? */
  if(mitte hoch mitte <z)
   unten=mitte;
  else if(mitte hoch mitte >z)
   oben=mitte;
  else /* Zufällig die Lösung erraten! */
   return mitte;
 }

 /* Die Mitte des Intervalls sollte eine gute Näherung sein. */
 return (unten+oben)/2;
}
```

Beispiel Wenn wir mit diesem Verfahren die Hyperwurzel aus 27, die 3 ist, ziehen wollen, erhalten wir diese Iterationsschritte:

unten	*mitte*	*oben*	$mitte^{mitte}$
1	$2,5$	4	$9,8821$
$2,5$	$3,25$	4	$46,0915$
$2,5$	$2,875$	$3,25$	$20,8249$
$2,875$	$3,0625$	$3,25$	$30,8040$
$2,875$	$2,96875$	$3,0625$	$25,2902$
$2,96875$	$3,015625$	$3,0625$	$27,9012$

Tab. 3: Hyperwurzelberechnung mit Intervallschachtelung

Die Differenz der Intervallgrenzen liegt jetzt nur mehr bei $0,09375$, für dieses Beispiel ausreichend. Auch die Lösung $3,015625$ liegt relativ knapp an der korrekten Lösung 3, ihr Hyperquadrat $27,9012$ liegt "ungefähr" bei 27.

Hätte man diese Iteration mit einem Computer 100-mal ausgeführt (was kein Problem darstellt), so wären wenigstens die ersten 28 Stellen nach dem Komma korrekt.

4.2.2 Babylonisches Wurzelziehen

Original

Das *Babylonische Wurzelziehen*[1] (oder Verfahren nach **Heron**) ist ein altes Iterationsverfahren, das zum Ziehen von (Quadrat-)Wurzeln verwendet werden kann, und viel schneller konvergiert als es mit einer Intervallschachtelung möglich ist.

Angenommen, es ist eine Zahl x gesucht, deren Quadrat a ist (es soll somit die Quadratwurzel von a gezogen werden). Dann beginnt man mit einer geratenen Lösung x_1 (1 ist z. B. ein guter Anfangswert) und berechnet ein y so, dass $x_1 \cdot y = a$ ist.

Geometrisch gedeutet handelt es sich beim Wurzelziehen ja darum, die Seitenlänge eines Quadrats zu ermitteln, dessen Fläche man kennt. Nach dem obigen Verfahren wird ein Rechteck gebildet, das dieselbe Fläche hat, und die zweite Seitenlänge zu x_1 berechnet.

Als nächsten Iterationsschritt x_2 (also eine besser geratene Lösung, mit der wieder von Vorne begonnen wird) verwendet man das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Seitenlängen; denn um die gesuchte Wurzel möglichst gut anzunähern, ist ja ein Rechteck zu finden, dessen Seitenlängen möglichst ähnlich sind.

Mathematisch formuliert kommt man zu dieser Iterationsvorschrift[2]:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y}{2} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Dieses Verfahren kann man auch auf 3te, 4te oder $b$te Wurzeln verallgemeinern. Dann ergibt sich diese allgemeinere Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = \frac{(b-1) \cdot x_n + y}{b} = \frac{(b-1) \cdot x_n + \frac{a}{{x_n}^{b-1}}}{b}$$

Obige Iterationsvorschrift ist übrigens eigentlich nur ein Spezialfall des Newton-Näherungsverfahrens, wenn man die Nullstellen von $f(x) = a - x^b$, also eben die $b$te Wurzel aus a, berechnet.

[1] Vgl. Wikipedia: Babylonisches Wurzelziehen. (6. 2. 2006).
http://de.wikipedia.org/wiki/Babylonisches_Wurzelziehen
(11. 2. 2006).

[2] Ebda.

Anwendung auf Hyperwurzeln

Um das Verfahren auf Hyperwurzeln anzuwenden, können einfach die Verknüpfungen zur Berechnung von y um eine Stufe erhöht werden. Ich schlage außerdem vor, das arithmetische Mittel durch das geometrische Mittel zu ersetzen, da mir dies einerseits logischer erscheint, und andererseits bei Tests im Allgemeinen besser abgeschnitten hat. Jedoch kann (z. B. der Einfachheit halber) genauso gut auch weiterhin das arithmetische Mittel verwendet werden, was jedoch üblicherweise langsamer konvergiert.

$$x_{n+1} = \sqrt[b]{{x_n}^{b-1} \cdot y} = \sqrt[b]{{x_n}^{b-1} \cdot \sqrt[x_n o_3 (b-1)]{a}}$$

Wenn man sich nur auf Hyper*quadrat*wurzeln beschränkt, kann diese komplex anmutende Wurzel etwas einfacher geschrieben werden:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y} = \sqrt{x_n \cdot \sqrt[x]{a}}$$

Beispiel Auch dieses Verfahren möchte ich an der Hyperquadratwurzel aus 27 demonstrieren, es ist dabei im Vergleich zu oben sehr schön ersichtlich, dass es viel schneller konvergiert als die Intervallschachtelung. Als Folge der Iterationsschritte ergibt sich:

$$< 1,\ 5{,}1962,\ 3{,}1302,\ 2{,}9952,\ 3{,}0002,\ 2{,}99999 >$$

Bereits nach 12 Iterationen ergibt sich eine Lösung von $2{,}99999999999983$, deren Hyperquadrat auch nur mehr um $4{,}6896 \cdot 10^{-13}$, also praktisch unmerklich, von der korrekten 27 abweicht.

Dieselbe Verallgemeinerung kann auch für noch höhere Wurzeln fortgesetzt werden, aber wie man an der $x$ten Wurzel sieht, wird immer rekursiv eine Lösung für Wurzeln einer Stufe niedriger benötigt; wenn man dafür wieder dieses Verfahren einsetzt (da man ja bei noch höheren Wurzeln zumindest mehrfach die “einfache” Hyperwurzel ziehen muss), hat man dabei einen ziemlich großen Rechenaufwand bzw. eine ziemlich große Ungenauigkeit.

4.3 Neue Zahlenmengen

4.3.1 Natürlich, ganz und rational

Bereits bei der Allgemeinen Algebra habe ich erwähnt, dass alle Überlegungen die Zahlen betreffend von der Menge der **natürlichen Zahlen** ausgehen sollten. Dort sind alle Omikron-Verknüpfungen wie Addition, Multiplikation oder Potenz vollständig definiert.

Will man jedoch die erste davon, die Addition, umkehren, so stellt man fest, dass man neue Zahlen benötigt, um auch die Subtraktion ohne Einschränkungen durchführen zu können. Die "vollständigere" neue Zahlenmenge sind die **ganzen Zahlen**.

Trotzdem sind, um auch die nächste Verknüpfung (die Multiplikation) umkehren zu können, wieder neue Zahlen nötig. So kommt man schließlich zu den **rationalen Zahlen**, die je der Quotient einer natürlichen mit einer ganzen Zahl sind (wobei natürlich auch 1 als Nenner erlaubt ist).

4.3.2 Abzählbarkeit

Existiert eine Abbildung, die jedem Element einer Menge X **genau eine** natürliche Zahl zuordnet und auch jeder natürlichen Zahl **genau ein** Element von X zugeordnet wird, so heißt X *abzählbar*[3]. Da die Menge trotzdem unendlich ist, heißt die korrekte Bezeichnung "abzählbar unendlich"; im Weiteren werde ich das Wort "unendlich" stillscheigend weglassen, es handelt sich hier **immer** um abzählbar *unendliche* Mengen.

Da es darum geht, den Elementen von X eindeutig eine natürliche Zahl zuzuordnen, kann man auch sagen, eine Menge ist **genau dann** abzählbar, wenn alle ihre Elemente in einer Reihe aufgeschrieben werden können (bzw. eine Folge existiert, die aus ihren Elementen besteht); es wird jedem Element dann sein (bei 0 beginnender) Index, der eine natürliche Zahl ist, zugeordnet.

Es ist offensichtlich, dass die natürlichen Zahlen abzählbar sind. Auch für die ganzen Zahlen ist dieses Faktum leicht zu beweisen, man erhält eine Folge, die alle ganzen Zahlen enthält, indem man die natürlichen Zahlen aufschreibt und anschließend hinter jede Zahl außer Null ihr negatives Äquivalent schreibt:

$$\mathbb{Z}=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ ...\}$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass eine Menge auch dann abzählbar ist, wenn man sie in ein *2*-dimensionales Raster eintragen kann. Denn wenn man dessen Felder diagonal durchläuft, kann man sie wieder in einer Reihe anordnen. Bei diesem Verfahren handelt es sich um die *Cantor-Diagonalisierung*[4].

[3]Vgl. Wikipedia: Cantor-Diagonalisierung. (10. 1. 2006). http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Diagonalisierung (11. 2. 2006).

[4]Vgl. Ebda.

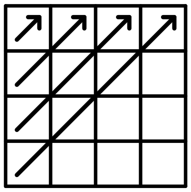


Abb. 2: Cantor-Diagonalisierung

Mit dieser Erkenntnis kann man nun auch leicht die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen beweisen; dieser Beweis[5] geht ebenfalls auf **Georg Cantor** zurück. Dazu schreibt man alle positiven Brüche so in das Raster, dass im Feld $(x;\ y)$ der Bruch $\frac{x}{y}$ steht:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tab. 4: Anordnung der positiven Brüche im Raster

Wenn man dieses Schema nun wie oben beschrieben diagonal durchläuft, die kürzbaren Brüche auslässt, an den Anfang der Folge die Null setzt und hinter jeden Bruch sein Negatives schreibt, erhält man eine Folge aller rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q}=\{0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ 3,\ -3,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 4,\ -4,\ ...\}$$

4.3.3 Irrationalität und Transzendenz

Es ist allgemein üblich, nach diesen abzählbaren Zahlenmengen (den rationalen Zahlen) bereits das überabzählbare Kontinuum der reellen Zahlen zu nennen; dennoch gibt es auch noch verschiedene Begriffe für diese reellen Zahlen, wie *irrational* oder *transzendent*:

Irrational Eine *irrationale* Zahl ist jede reelle Zahl, die **nicht** rational ist; sie ist demnach nicht als Quotient einer natürlichen und einer ganzen Zahl darstellbar.

Algebraisch Eine Zahl heißt **genau dann** *algebraisch*, **wenn** sie eine Lösung (Nullstelle) irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Somit fallen auch irrationale Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$ in diese Kategorie, während π oder e nur als Grenzwerte dargestellt werden können.

Transzendent Eine *transzendente* Zahl ist eben **keine** Lösung eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, also **nicht** algebraisch. Klassische Vertreter hierfür sind π oder e.

[5] Vgl. Ebda.

Es stellt sich nun vielleicht die Frage, in welche Kategorie Hyperwurzeln fallen, wie $2\iota_3 2$. Um die Irrationalität dieser Zahl mit einem Beweis durch Widerspruch zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe einen Bruch $\frac{p}{q}$ (wobei es sich um zwei natürliche Zahlen handelt, da die gesuchte Wurzel offensichtlich positiv ist), dessen Wert eben $2\iota_3 2$ ist:

$$\frac{p}{q}=2\iota_3 2$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}=2$$

$$\frac{p^p}{q^p}=2^q$$

$$p^p=2^q\cdot q^p$$

Da es sich nur um natürliche Zahlen handelt, muss p offensichtlich eine gerade Zahl sein; deshalb kann p durch $2\cdot r$ ersetzt werden, wobei auch r natürlich ist.

$$(2\cdot r)^p=2^q\cdot q^p$$

$$2^p\cdot r^p=2^q\cdot q^p$$

Wir wissen, dass die ursprünglich gesuchte Wurzel größer als 1 sein muss, und deshalb auch $p>q$ ist. Daher können wir nun beide Seiten durch 2^q teilen, ohne Brüche (negative Exponenten) zu erhalten.

$$2^{p-q}\cdot p^p=q^p$$

Offensichtlich ist auch q gerade, und kann als $2\cdot s$ geschrieben werden:

$$\frac{p}{q}=\frac{2\cdot r}{2\cdot s}=\frac{r}{s}$$

Der Bruch kann also gekürzt werden, und besteht immer noch aus zwei natürlichen Zahlen, die jedoch kleiner als die ursprünglichen sind. Beginnt man aber mit diesem Bruch wieder von Vorne, so stellt man fest, dass auch er noch kürzbar ist, der nächste auch, und der urspüngliche Bruch somit unendlich oft gekürzt werden kann; er kann daher nicht existieren, und $2\iota_3 2$ ist irrational! Dieser Beweis funktioniert übrigens auch, wenn man für 2 eine beliebige andere Primzahl als "Radikanden" einsetzt.

Zusätzlich zur Irrationalität vermute ich auch, dass diese Zahlen sogar transzendent sind, habe dafür aber keinen Beweis.

4.3.4 Die Mengen $\mathbb{G}_n$

Versucht man jede Verknüpfung umzukehren und definiert man dazu entsprechende neue Mengen, ergibt sich für jede Rechenstufe eine neue Zahlenmenge, in der die entsprechende Omikron-Verknüpfung o_n umgekehrt werden kann (und zwar mit ι_n wie mit ν_n, wenn ich im späteren auch nur den ersten Fall behandeln werde). So entspricht $\mathbb{G}_0$ den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{G}_1$ den rationalen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{G}_n$ der Menge, in der o_n für alle Zahlen aus der nächsttieferen Menge $\mathbb{G}_{n-1}$ umkehrbar wird; $\mathbb{G}_0$ wurde bereits früher formal definiert, $\mathbb{G}_n$ kann rekursiv angegeben werden:

$$\mathbb{G}_{n+1}=\{a\iota_n b|\ a,\ b\in\mathbb{G}_n\}\cup\{a\nu_n b|\ a,\ b\in\mathbb{G}_n\}$$

Da 1 das neutrale Element von ι_n und die Eins sicher in $\mathbb{G}_n$ enthalten ist, ist $\mathbb{G}_n$ sicher eine Teilmenge von $\mathbb{G}_{n+1}$, da alle Elemente aus $\mathbb{G}_n$ mit *1* verknüpft unverändert in $\mathbb{G}_{n+1}$ eingehen.

Mächtigkeit

Alle diese Mengen $\mathbb{G}_n$ sind, selbst wenn n gegen unendlich strebt, abzählbar. Dies kann leicht mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

1. $\mathbb{G}_0$ ist abzählbar, da die Abzählbarkeit der ganzen Zahlen bereits weiter oben bewiesen wurde.

2. Wenn $\mathbb{G}_{n-1}$ abzählbar ist, kann man jedes Zahlenpaar $(a;\ b)\in{\mathbb{G}_{n-1}}^2$ gemäß der Reihung von a als x-Koordinate und b als y-Koordinate eindeutig in ein Feld des Rasters eintragen.

   Nun kann man ebendieses Raster diagonal durchlaufen, und dabei für jedes Feld $(a;\ b)$ die beiden Zahlen $a\iota_n b$ und $a\nu_n b$, die in $\mathbb{G}_n$ sind, an die Reihe anhängen.

   Lässt man dabei undefinierte Zahlen (wie z. B. nullte Wurzeln) weg und überspringt alle gleichen Zahlen bis auf die erste nach dieser Reihenfolge, erhält man eine vollständige Reihung aller Elemente von $\mathbb{G}_n$, weshalb auch diese Menge abzählbar ist.

***Echte* Teilmengen**

Bei $\mathbb{G}_n$ handelt es sich zwar stets um abzählbare Mengen, dennoch scheint mir, dass auch immer neue Elemente dazukommen:

$$\mathbb{G}_n \backslash \mathbb{G}_{n-1} \neq \emptyset$$

$\mathbb{G}_{n-1}$ ist also nicht nur eine Teilmenge von $\mathbb{G}_n$, sondern sogar eine *echte* Teilmenge.

Da mit höher werdender Rechenstufe keine brauchbaren Rechengesetze mehr erfüllt sind, ist es unmöglich, einen Beweis wie weiter oben für die Irrationalität von Hyperwurzeln durchgeführt, allgemein zu formulieren. Deshalb kann ich diese Aussage — wie zuvor schon die Transzendenz dieser Hyperwurzeln — nur vermuten; es erscheint mir jedoch gerade deshalb, weil fast alle Gesetzmäßigkeiten verschwinden und die Verknüpfungen höherer Stufen sehr rasch riesige Werte erreichen, sehr unwahrscheinlich, dass es eine Menge $\mathbb{G}_n$ mit **endlichem** n geben soll, für die o_m **für alle** m gegen Unendlich umkehrbar bleibt.

Eine bessere Zahlenhierarchie

Meiner Ansicht nach besteht ein großer Unterschied zwischen Hyperwurzeln, die, wie ich vermute, transzendent und ebenso — wie weiter oben bewiesen — **abzählbar** sind, und *echt transzendenten* Zahlen wie eben π oder e, die die ***über*abzählbare** Menge der reellen Zahlen bilden.

Ähnlich sehe ich die Stellung der komplexen Zahlen: Nach allgemein gültiger Meinung bildet $\mathbb{C}$ die "nächste Stufe" in der Hierarchie der Zahlenmengen nach $\mathbb{R}$; trotzdem ist z. B. i als Quadratwurzel aus -1, obwohl diese Zahl natürlich für uns unvorstellbar ist, viel "einfacher" als echt transzdendente *reelle* Zahlen (sie ist ja auch algebraisch, obwohl sie komplex ist). Deshalb denke ich, die komplexen Zahlen sollten von Anfang an mit ins System eingewoben werden, und bereits vor π oder e definiert werden!

Ich halte eine Hierarchie ähnlich zu der der $\mathbb{G}_n$-Mengen sinnvoller und logisch richtiger:

$\mathbb{G}$	Die **natürlichen Zahlen** als Grundlage.
$\mathbb{G}_0$	Durch Umkehrung der Addition kommt man zu den **ganzen Zahlen**.
$\mathbb{G}_1$	Die **rationalen Zahlen** erlauben jede Division.

$\mathbb{G}_2$	Hierbei handelt es sich in etwa um die **algebraischen Zahlen** (komplexe inklusive), es sind aber z. B. nicht mehr alle Summen von Wurzeln definiert, und es zählen alle **Logarithmen** zu dieser Menge.
$\mathbb{G}_3$	Hier sind nun auch schon transzendente Zahlen, wie die Hyperwurzeln, enthalten.
...	
$\mathbb{C}$	Zum Abschluss wirklich **alles**, auch echt transzendente Zahlen.

Tab. 5: Hierarchie der Zahlenmengen

Dennoch ist auch diese Hierarchie meiner Meinung nach nicht optimal, da man zwar mit jeder neuen Menge eine immer höhere Verknüpfung umkehren kann, aber z. B. die Summe $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ echt transzendent ist. Generell halte ich trotzdem das oben angeführte System für besser als die allgemein übliche Hierarchie; eine Summe aus zwei Wurzeln ist ja immerhin auch ein Konstrukt, dessen Definition bei genauerer Betrachtung gar nicht so klar ist!

Schlussbetrachtung

Rückblickend auf die Arbeit stelle ich fest, dass es mir meistens gut gelungen ist, meine eigenen Erwartungen zu erfüllen. Ich habe es geschafft, dem Wesen der (natürlichen) Zahlen zumindest soweit auf die Spur zu kommen, dass mir heute vieles klarer erscheint als zuvor.

Mir wurde es zu Teil, für mich befriedigende Antworten auf viele jener Fragen, die mich anfänglich überhaupt erst dazu getrieben haben, mir mit meinen eigenen Gedanken ein Bild zu schaffen und nicht blind auf Althergebrachtes zu vertrauen, zu finden; so war es nach dem Schaffen der Voraussetzungen (Definitionen) erstaunlich einfach, die fundamentalen Gesetze unser Algebra (wie Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, aber auch die Monotoniegesetze, die für algebraische Gleichungsumformungen essentiell sind) abzuleiten und zu beweisen.

Die zweite wichtige Erkenntnis, die ich aus dieser Arbeit gezogen habe, ist, dass es in der Wissenschaft durchaus sinnvoll sein kann, bewusst zu versuchen, die allgemein gültigen Grenzen und Vorstellungen zu übertreten. Denn auch wenn ich jetzt noch keine sinnvolle praktische Anwendung für meine neuen Ideen, wie völlig andere Zahlenmodelle und "übermächtige" Verknüpfungen, gefunden habe, und wenn vielleicht auch nie eine gefunden werden wird, so war es doch auf jeden Fall wenigstens lehrreich für mich und hoffentlich beispielhaft für andere, die vielleicht — ähnlich wie ich es versucht habe — die Grenzen des Anerkannten verlassen und möglicherweise gerade damit ein neues Zeitalter in ihrem Gebiet einläuten. Denn in den Naturwissenschaften (und dort vor allem in der Mathematik) gilt wie im Lotto: Alles ist möglich, wenn sich auch vieles später doch nicht als der große Treffer erweist.

Trotzdem scheint diese Lotterie die Hexenküche der Wissenschaft zu sein, denn gerade Namen großer Lottogewinner wie **Kopernikus** mit seinem Weltbild, **Newton** mit der Gravitation oder **Einstein** mit der Relativität von Raum und Zeit sind uns heute noch ein Begriff; und gerade sie wurden mit ihren Ideen zu ihrer Zeit sicherlich nicht gerne gesehen, da sie uns dazu nötigten, unser heiles Weltbild von außen neu zu betrachten und völlig umzukrempeln.

In diesem Sinne möchte ich auch, dass in dem unwahrscheinlichen Fall, dass Hyperwurzeln, $\mathbb{G}_n$-Mengen oder o_n-Verknüpfungen irgendwann einmal einen allgemein anerkannten Teil der Mathematik bilden sollten, jeder nur erdenkliche Weg beschritten wird, diese vorliegende Arbeit zu erweitern, zu ändern, als jeden Sinn entbehrend zu entlarven und zu widerlegen. Und vielleicht wird eines Tages eine Arbeit mit ähnlichem Schlusswort verfasst werden, in der ein unzufriedener Geist meine Ideen hinterfragt. Wenn sich der Kreis auf diese Weise irgendwann einmal schließen wird, so sei es ein Zeichen für die pulsierende Lebendigkeit der staubtrockenen Mathematik.

Wie dem auch sei, letztendlich bin ich heute nach fast einem halben Jahr des Schreibens, des Rätselratens und des Lösens immer neuer Probleme fachlicher wie technischer Natur, die sich mir im Laufe dieser Zeit aufgetan haben, glücklich, endlich diese abschließenden Worte verfassen zu dürfen. Doch es handelt sich nicht um ein völlig ungetrübtes, sorgloses Glück, bei dem man einfach "abschalten" kann, denn wie ich Antworten auf mir selbst gestellte Fragen fand, taten sich — wie es in jedem Zweig der Naturwissenschaft üblich ist — immer nur noch mehr neue Fragen auf; es war mir natürlich nicht möglich, bis heute und im beschränkten Rahmen dieser Arbeit alle davon zu beantworten. Dennoch war diese letzte Zeit sicherlich ein Meilenstein meiner geistigen Entwicklung, der mich hoffen lässt, dass ich in Zukunft mit dem gerade erworbenen Wissen und der gewonnenen Erfahrung besser in der Lage sein werde, im Zuge meiner weiteren Ausbildung, meines Präsenzdienstes, meiner zukünftigen Arbeit oder meiner Freizeit auftauchende Fragen beantworten zu können, und ebenso viele Fragen mir selbst aufzuerlegen, wenn ich manches nicht ohne eigene Überlegung hinnehmen will.

Anhang A

Formale Definitionen und Beweise

In diesem Anhang führe ich alle Definitionen und Beweise der Allgemeinen Algebra formal durch; hier lege ich jedoch keinen Wert mehr auf Ausführlichkeit, dies ist nur als Ergänzung zum eigentlichen Hauptteil der Arbeit gedacht, und kann z. B. zum Nachschlagen gewisser Beweise während des Lesens des Hauptteils verwendet werden.

A.1 Grundlagen und Allgemeine Algebra

A.1.1 Grundbegriffe

Def. 1 *Im Weiteren steht das Wort Zahl für ein beliebiges Objekt, für das der Vergleich mit einem anderen Objekt (a=b) definiert und **genau dann** wahr ist, **wenn** beide Zahlen bei allen Verknüpfungen und Operationen äquivalent zueinander sind.*

Weiters gilt:

$$(a{\neq}b){\Leftrightarrow}\neg(a{=}b)$$

Def. 2 *Eine Anzahl ist ein Element der Menge* $\mathbb{N}_0{:=}\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$. *Die Variablen n, m und k stehen im Weiteren, falls nicht explizit anders angegeben, meist für Anzahlen.*

Def. 3 *Man kommt durch Iteration mit einer Funktion f von einer Zahl a zu einer anderen Zahl b, wenn*

$$\exists\, m{\geq}1{:}\ (z_0{=}a,\ \ z_{n+1}{=}f(z_n)){\Rightarrow}(z_m{=}b)$$

A.1.2 Allgemeine Algebra

Def. 4 *Gegeben sei eine Funktion* $ink(a)=b$ *und eine Zahlenmenge* $\mathbb{G}$. *Weiters seien diese Axiome erfüllt:*

1. $a\in\mathbb{G}\Rightarrow(b\in\mathbb{G}\wedge a\neq b)$
2. *Man kann für alle* c, $d\in\mathbb{G}\wedge c\neq d$ *durch Iteration mit ink* ***entweder*** *von* c *nach* d *kommen,* ***oder*** *umgekehrt.*
3. $\exists\, d\in\mathbb{G}$: $\forall\, c\in\mathbb{G}$: $ink(c)\neq d$

Eine solche Funktion zusammen mit ihrer Grundmenge $\mathbb{G}$ *sei eine Allgemeine Algebra.*

Falls nicht explizit anders angegeben, implizieren die Bezeichnungen $\mathbb{G}$ *und ink im Weiteren stets eine Allgemeine Algebra.*

Satz 1 *Es gibt* ***genau ein*** $b\in\mathbb{G}$: $\forall\, a\in\mathbb{G}$: $ink(a)\neq b$.

Beweis Gäbe es zwei solche Elemente, b_1 und b_2, könnte man durch Iteration mit *ink* weder zu b_1 noch zu b_2 kommen (da es kein $a\in\mathbb{G}$: $ink(a)=b$ gibt), was Axiom 2 widerspricht.

Def. 5 *Das einzige* $b\in\mathbb{G}$: $\forall\, a\in\mathbb{G}$: $ink(a)\neq b$ *einer Allgemeinen Algebra bezeichnen wir als Nullelement (0) derselben.*

$ink(0):=1$. *1 ist das Einselement.*

Satz 2 *In einer Allgemeinen Algebra kann man von* ***keinem*** $a\in\mathbb{G}$ *durch Iteration mit ink zu sich selbst kommen.*

Beweis Nach Axiom 1 ergibt der zwingend erforderliche erste Iterationsschritt ein $b\neq a$. Da man auf diese Weise von a nach b kommt, ist es nach Axiom 2 nicht möglich, von b wieder zu a zurück zu kommen.

Satz 3 *Die Grundmenge einer Allgemeinen Algebra ist eine unendliche Menge.*

Beweis Man betrachte die Folge $z_0=0$, $z_{n+1}=ink(z_n)$. Mindestens das erste Glied z_0 ist ein Element der Grundmenge. Weiters gilt nach Axiom 1: $(z_n\in\mathbb{G})\Rightarrow(z_{n+1}\in\mathbb{G})$. Es ergeben sich so wirklich unendlich viele *verschiedene* Elemente, da sie sich nach **Satz 2** nicht wiederholen können.

A.1.3 Vergleich

Def. 6 *Gegeben seien zwei* $a,\ b \in \mathbb{G}$*. Dann ist* $a<b$ ***genau dann*** *wahr, wenn man durch Iteration mit ink von* a *nach* b *kommt.*

Weiters sei:

- $c>d \Leftrightarrow d<c$
- $c \leq d \Leftrightarrow c \not> d$
- $c \geq d \Leftrightarrow c \not< d$

Satz 4

$$\forall\, a,\ b \in \mathbb{G}\colon\ (a<b) \veebar (a=b) \veebar (a>b)$$

Beweis

- Wenn $a=b$ ist, kann man nach **Satz 2 weder** von a nach b kommen, **noch** umgekehrt.
- Es kann nur **entweder** $a<b$ **oder** $a>b$ gelten, da man nach Axiom 2 nur **entweder** von a nach b, **oder** von b nach a kommen kann.

Def. 7 *Seien* $a,\ b \in \mathbb{G}$: $ink(a)=b$*. Dann ist* a *der Vorgänger von* b*, und* b *der Nachfolger von* a*.*

Satz 5

1. *Zu jedem* $a \in \mathbb{G}$ *gibt es* ***genau einen*** *Nachfolger.*
2. *Zu jedem* $a \in \mathbb{G} \wedge a \neq 0$ *gibt es* ***genau einen*** *Vorgänger; zu* 0 *gibt es* ***keinen****.*

Beweis

1. Da *ink* eine Funktion ist, gibt es **höchstens einen** Nachfolger. Aus Axiom 1 folgt, dass es **mindestens einen** geben muss.
2. 0 hat nach **Def. 5** keinen Vorgänger, alle anderen b haben **mindestens einen**. Gäbe es ein b mit zwei Vorgängern, a_1 und a_2, so käme man im ersten Iterationsschritt von beiden zu b, laut Axiom 2 kann man somit von b zu keinem der beiden a kommen. Daher ist es auch unmöglich, von a_1 nach a_2 (oder umgekehrt) zu kommen, was Axiom 2 widerspricht.

Satz 6

$$\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon (a{<}b{\wedge}b{<}c){\Rightarrow}(a{<}c)$$

Beweis Offensichtlich kommt man von a nach b, und ebenso von b nach c. Also muss man auch von a nach c kommen.

A.1.4 Index

Def. 8 *Der Index eines $a{\in}\mathbb{G}$ ist eine Anzahl. Der von 0 ist* 0*, für jedes andere a ist es die Anzahl an Iterationen, um von 0 nach a zu kommen:*

$$(z_0{=}0,\ z_{n+1}{=}ink(z_n)){\Rightarrow}(ind(z_m){=}m{\wedge}z_{ind(a)}{=}a)$$

Satz 7 *Sind die Indizes zweier Elemente gleich, so sind auch die Elemente selbst gleich.*

Beweis Man erhält das zu einem Index n gehörende Element, indem man das Glied z_n der Folge $(z_0{=}0,\ z_{n+1}{=}ink(z_n))$ berechnet. Da ink als Funktion ein eindeutiges Ergebnis liefert, ist die zum Index n gehörende Zahl z_n eindeutig.

Satz 8

$$\forall\, a{\in}\mathbb{G}\colon ind(ink(a)){=}ind(a){+}1$$

Beweis Man betrachte die Folge $(z_0{=}0,\ z_{n+1}{=}ink(z_n))$.

$$ind(ink(a)){=}^{\mathrm{D8}}ind(ink(z_{ind(a)})){=}ind(z_{ind(a)+1}){=}^{\mathrm{D8}}ind(a){+}1$$

Satz 9 *Ein Element $a{\in}\mathbb{G}$ ist **genau dann***

1. *kleiner,*
2. *gleich oder*
3. *größer*

*als ein Element $b{\in}\mathbb{G}$, **wenn** dieselbe Relation auch auf die beiden Indizes zutrifft.*

Beweis

1. **Genau wenn** $ind(a){<}ind(b)$ gilt, kann man durch Iteration von a nach b kommen (da der Index durch die Iteration nach **Satz 8** immer größer wird).

2. Aus der Definiton der Zahl folgt, dass bei gleichen Elementen auch die Indizes gleich sein müssen. Andererseits müssen bei gleichen Indizes nach **Satz 7** auch die Elemente gleich sein.

3. Analog zu 1. (durch Vertauschen der beiden Variablen).

A.1.5 Dualität

Def. 9 *In zwei Allgemeinen Algebren heißen die beiden Elemente $a \in \mathbb{G}$ und $\overline{a} \in \overline{\mathbb{G}}$* ***genau dann*** *äquivalent,* ***wenn*** *ihre Indizes gleich sind.*

$$\forall\, a \in \mathbb{G},\ \overline{a} \in \overline{\mathbb{G}}\colon (a \equiv \overline{a}) \Leftrightarrow (ind(a) = ind(\overline{a}))$$

Def. 10 *Eine Funktion $f\colon \mathbb{G}^n \to \mathbb{G}$ heißt* ***genau dann*** *dual-regulär,* ***wenn*** *sie für äquivalente Argumente ein äquivalentes Ergebnis liefert:*

$$(a \equiv \overline{a} \wedge b \equiv \overline{b} \wedge c \equiv \overline{c} ...) \Rightarrow (f(a,\ b,\ c,\ ...) \equiv f(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ ...))$$

Satz 10 *Die Indizes einer Allgemeinen Algebra bilden selbst eine Allgemeine Algebra. Die Grundmenge ist $\mathbb{N}_0$, für ink gilt:*

$$ink(ind(a)) := ind(ink(a))$$

Beweis Es gilt für die drei Axiome:

1. Ein Index ist nach **Def. 8** *immer* eine Anzahl; außerdem sind die Indizes verschiedener Elemente (und um solche handelt es sich bei a und $ink(a)$ offensichtlich) stets auch verschieden (**Satz 9**).

2. Zwei Indizes sind **genau dann** gleich, **wenn** auch die zugehörigen Elemente gleich sind. Deshalb kommt man auch **genau dann** mit obiger Inkrementierungsfunktion von $ind(a)$ nach $ind(b)$, **wenn** es von a nach b möglich ist; dies muss möglich sein, deshalb ist auch das 2. Axiom erfüllt.

3. Es kann kein a geben, so dass $ink(ind(a)){=}0$, da es auch kein a gibt, mit $ink(a){=}0$.

Satz 11

$$\forall\, a \in \mathbb{G}\colon\ ind(ind(a)) = ind(a)$$

Beweis

1. Der Index des Nullindexes 0 ist ebenfalls 0.
2. $ind(ind(ink(a))) =^{\mathrm{S10}} ind(ink(ind(a))) =^{\mathrm{S10}} ink(ind(ind(a))) = ink(ind(a)) =^{\mathrm{S10}} ind(ink(a))$

Satz 12

$$\forall\, a \in \mathbb{G}\colon\ a \equiv ind(a)$$

Beweis Dafür ist zu zeigen, dass die beiden Indizes gleich sind ($ind(a) = ind(ind(a))$), was nach **Satz 11** gilt.

Satz 13 *Für eine dual-reguläre Funktion f gilt:*

$$ind(f(a,\ b,\ c,\ ...)) = f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...)$$

Beweis

$$f(a,\ b,\ c,\ ...) \equiv f(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ ...)$$

$$f(a,\ b,\ c,\ ...) \equiv f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...)$$

$$ind(f(a,\ b,\ c,\ ...)) = ind(f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...))$$

$$ind(f(a,\ b,\ c,\ ...)) = f(ind(a),\ ind(b),\ ind(c),\ ...)$$

Satz 14 *ink einer Allgemeinen Algebra ist dual-regulär.*

Beweis $(a \equiv \overline{a}) \Leftrightarrow^{\mathrm{D9}} (ind(a) = ind(\overline{a})) \Leftrightarrow (ind(a)+1 = ind(\overline{a})+1) \Leftrightarrow^{\mathrm{S8}} (ind(ink(a)) = ind(ink(\overline{a}))) \Leftrightarrow^{\mathrm{D9}} (ink(a) \equiv ink(\overline{a}))$

A.2 Omikron-Verknüpfungen

A.2.1 Allgemein

Def. 11 *In einer Allgemeinen Algebra ist die Verknüpfung o_0 definiert:*

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon (c_0{=}a,\ c_{n+1}{=}ink(c_n)){\Rightarrow}ao_0b{=}c_{ind(b)}$$

Für alle anderen Verknüpfungen o_n, mit $n{\geq}1$, gilt:

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon (d_1{=}a,\ d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m){\Rightarrow}ao_nb{=}d_{ind(b)}$$

Falls möglich, hat $ao_n\mathit{0}$ definiert zu sein.

$\oplus$ sei ein Synonym für o_0, $\otimes$ eines für o_1.

Satz 15 *1 ist Rechtsneutrales zu jeder Verknüpfung o_n, $n{\geq}1$:*

$$\forall\, a{\in}\mathbb{G}\colon ao_n\mathit{1}{=}a$$

Beweis Wir definieren die Folge d wie in **Def. 11**:

$$d_1{=}a,\ d_{m+1}{=}ao_{n-1}d_m$$

$$ao_n\mathit{1}{=}^{\mathrm{D11}}d_{ind(\mathit{1})}{=}^{\mathrm{D8}}d_1{=}a$$

Satz 16 *Jede Funktion $f(a,\ b){:=}ao_nb$ ist dual-regulär.*

Beweis Im Folgenden beziehen sich alle Aussagen auf den Fall $a{\equiv}\overline{a}{\wedge}b{\equiv}\overline{b}$. Beweis durch vollständige Induktion:

1. Da $ind(b){=}ind(\overline{b})$, führt das Auflösen von o_0 in beiden Fällen zu denselben Ausdrücken mit ink. Weil diese Ausdrücke nach **Satz 14** dual-regulär sind, ist auch o_0 dual-regulär.

2. Ebenso führt die Auflösung von o_{n+1} zu einem Term mit o_n, der nach der Induktionsbedingung dual-regulär ist.

A.2.2 Addition

Satz 17

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon\ ink(a){\oplus}b{=}ink(a{\oplus}b){=}a{\oplus}ink(b)$$

Beweis Wir definieren die beiden Folgen c und d ähnlich zu c aus **Def. 11**:

$$c_0{=}a,\ c_{n+1}{=}ink(c_n)$$

$$d_0{=}ink(a),\ d_{n+1}{=}ink(d_n)$$

Es ist offensichtlich:

$$d_n{=}c_{n+1}$$

Damit kommt man nun zu:

$$ink(a){\oplus}b{=}^{\mathrm{D11}}d_{ind(b)}{=}c_{ind(b)+1}{=}ink(c_{ind(b)}){=}^{\mathrm{D11}}ink(a{\oplus}b)$$

$$ink(a{\oplus}b){=}^{\mathrm{D11}}ink(c_{ind(b)}){=}c_{ind(b)+1}{=}^{\mathrm{S8}}c_{ind(ink(b))}{=}^{\mathrm{D11}}a{\oplus}ink(b)$$

Satz 18 $\oplus$ *ist kommutativ:*

$$\forall\, a,\ b{\in}\mathbb{G}\colon\ a{\oplus}b{=}b{\oplus}a$$

Beweis

1. Es gilt offensichtlich für $a{=}b{=}0$.

2. Wenn $a{\oplus}b{=}b{\oplus}a$ gilt, wird die Induktion vervollständigt:

$$ink(a){\oplus}b{=}^{\mathrm{S17}}ink(a{\oplus}b){=}ink(b{\oplus}a){=}^{\mathrm{S17}}b{\oplus}ink(a)$$

Satz 19 $\oplus$ *ist assoziativ:* $\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon\ (a{\oplus}b){\oplus}c{=}a{\oplus}(b{\oplus}c)$

Beweis $d_0{=}a{\oplus}b,\ d_{n+1}{=}ink(d_n),\ e_0{=}a,\ e_{n+1}{=}ink(e_n)$.

Daher ist (nach **Def. 11**) $e_f{=}d_{f-ind(b)}$ (was leicht mit Induktion zu zeigen ist). Deshalb:

$$(a{\oplus}b){\oplus}c{=}^{\mathrm{D11}}d_{ind(c)}{=}e_{ind(b)+ind(c)}{=}^{\mathrm{S13}}e_{ind(b\oplus c)}{=}^{\mathrm{D11}}a{\oplus}(b{\oplus}c)$$

Satz 20 $\forall a{\in}\mathbb{G}$: $a{\oplus}0{=}a{\wedge}a{\oplus}1{=}ink(a)$. *0 ist also das Neutralelement von* $\oplus$.

Beweis Es sei c wie in **Def. 11** definiert:

$$c_0{=}a,\ c_{n+1}{=}ink(c_n)$$

$$a{\oplus}0{=}^{\text{D11}}c_{ind(0)}{=}^{\text{D8}}c_0{=}a$$

$$a{\oplus}1{=}^{\text{D11}}c_{ind(1)}{=}^{\text{D8}}c_1{=}ink(a)$$

A.2.3 Monotonie

Satz 21

$$\forall a,\ b{\in}\mathbb{G}: ((a{\neq}b){\Rightarrow}(f(a){\neq}f(b))){\Rightarrow}((f(a){=}f(b)){\Rightarrow}(a{=}b))$$

Beweis Wäre $a{\neq}b$, so wäre auch $f(a){\neq}f(b)$, was **Satz 4** widerspricht.

Satz 22

$$\forall a,\ b{\in}\mathbb{G}: (a{<}b){\Leftrightarrow}(\exists\, d{\in}\mathbb{G}: a{\oplus}d{=}b{\wedge}d{\neq}0)$$

Beweis

$$z_0{=}a,\ z_{n+1}{=}ink(z_n)$$

Genau wenn $a{<}b$ ist, **dann** existiert ein $z_m{=}b$ mit $m{=}ind(d){\neq}0$, und daher auch das $d{\neq}0$. Existiert andererseits das $d{\neq}0$, so muss $z_m{=}b$ sein.

Satz 23

$$\forall a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}: (a{<}b){\Leftrightarrow}(a{\oplus}c{<}b{\oplus}c){\wedge}(a{<}b){\Leftrightarrow}(c{\oplus}a{<}c{\oplus}b)$$

Beweis

$$(a{<}b){\Leftrightarrow}^{\text{S22}}(a{\oplus}d{=}b){\Rightarrow}((a{\oplus}c){\oplus}d{=}(a{\oplus}d){\oplus}c{=}b{\oplus}c){\Leftrightarrow}^{\text{S22}}(a{\oplus}c{<}b{\oplus}c)$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun **Satz 21** anwenden, um sogar Äquivalenz in diesem Ausdruck zu beweisen.

Da die Addition kommutativ und assoziativ ist, ist die zweite Beweishälfte analog durchzuführen.

Satz 24

$$\forall\, a,\ b \in \mathbb{G}, b \neq \mathit{0} \wedge a > \mathit{1}\colon\ b < a o_n b$$

Beweis Im Fall, dass es sich um die Addition handelt, gilt:

$$(b < a \oplus b) \Leftrightarrow^{\text{S20}} (\mathit{0} \oplus b < a \oplus b) \Leftrightarrow^{\text{S23}} (\mathit{0} < a) \Leftrightarrow \mathit{wahr}$$

Für alle weiteren Fälle seien zwei Folgen definiert:

$$c_1 = a,\ c_{m+1} = a o_{n-1} c_m$$

$$d_0 = \mathit{0},\ d_{m+1} = \mathit{ink}(d_m)$$

Daher ist $c_{\mathit{ind}(b)} =^{\text{D11}} a o_n b$ und $d_{\mathit{ind}(b)} =^{\text{D8}} b$, es bleibt zu zeigen, dass $d_m < c_m$.

1. $(d_1 < c_1) \Leftrightarrow (\mathit{1} < a) \Leftrightarrow \mathit{wahr}$
2. $$(d_{m+1} < c_{m+1}) \Leftrightarrow (\mathit{ink}(d_m) < a o_{n-1} c_m) \Rightarrow (d_m < c_m)$$

   Der letzte Schritt ist dadurch zu erklären, dass a c_m-mal um **mindestens** *1* erhöht wird (wenn man die Verknüpfung auflöst), das Ergebnis ist also sicher größer als c_m, während $\mathit{ink}(d_m)$ genau um nur *1* größer als d_m ist, im *ungünstigsten* Fall bleibt die Differenz also gerade erhalten.

Satz 25

$$\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{G}\colon\ (a < b) \Leftrightarrow (a o_{n+1} c < b o_{n+1} c) \wedge (a < b) \Leftrightarrow (c o_{n+1} a < c o_{n+1} b)$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, dass es für o_n gilt, dass auf der rechten Seite nie 0 steht, und dass im zweiten Fall c größer als 1 ist.

Beweis Der erste Teil wird mit vollständiger Induktion mit Hilfe von zwei Folgen bewiesen.

$$d_1 = a,\ d_{m+1} = a o_n d_m$$

$$e_1 = b,\ e_{m+1} = b o_n e_m$$

Somit ist $d_{ind(c)} \overset{D11}{=} ao_{n+1}c$ und $e_{ind(c)} \overset{D11}{=} bo_{n+1}c$.

1. Direkt aus der Definition der Folgen folgt:

$$(d_1 < e_1) \Leftrightarrow (a < b)$$

2. Als Induktionsbedingung gilt:

$$(d_m < e_m) \Leftrightarrow (a < b)$$

   Genau wenn nun $a<b$ (und daher auch $d_m<e_m$) gilt, **dann** ist auf Grund des Monotonie-Gesetzes für o_n sowohl $ao_nd_m<bo_nd_m$ als auch $bo_nd_m<bo_ne_m$ (diese beiden Aussagen sind wegen der Induktionsbedingung äquivalent). Daher:

$$(a<b) \Leftrightarrow (ao_nd_m<bo_ne_m) \Leftrightarrow (d_{m+1}<e_{m+1})$$

Für den zweiten Teil wird eine neue Folge benötigt:

$$f_1=c,\ \ f_{m+1}=co_nf_m$$

Es gilt also $f_{ind(z)} \overset{D11}{=} co_{n+1}z$.

$$(f_m<f_{m+1}) \Leftrightarrow (f_m<co_nf_m) \overset{S24}{\Leftrightarrow} wahr$$

Da jedes Folgeglied kleiner als sein Nachfolger ist, ist es auch kleiner als alle nachfolgenden (**Satz 6**):

$$(co_{n+1}a<co_{n+1}b) \Leftrightarrow (f_{ind(a)}<f_{ind(b)}) \Leftrightarrow (ind(a)<ind(b)) \overset{S9}{\Leftrightarrow} (a<b)$$

A.2.4 Rechtsseitige Null

Satz 26

$$\forall\, a \in \mathbb{G}:\ ao_{n+1}0=r$$

Wobei r das Rechtsneutrale von o_n ist, und o_n entweder die Addition sein oder $a>1$ gelten muss.

Beweis Nach **Def. 11** hat dieses Ergebnis, wenn möglich, definiert zu sein; es gilt allgemein für die Verknüpfung o_{n+1} analog zu dieser Definition:

$$d_{m+1}=ao_nd_m$$

$$d_1=ao_nd_0$$

$$a=ao_nd_0$$

$$ao_nr=ao_nd_0$$

$$r=d_0=^{\mathrm{D11}}ao_{n+1}0$$

Def. 12 *Alle Omikronverknüpfungen über der Addition mit rechtsseitiger Null, für die* ***Satz 26*** *nicht gilt, sind undefiniert.*

A.2.5 Distributivität

Satz 27 *Wenn o_n kommutativ und assoziativ ist, ist o_{n+1} rechts über o_n distributiv:*

$$\forall\, a,\ b,\ c\in\mathbb{G}, c\neq 0\colon\ (ao_nb)o_{n+1}c=(ao_{n+1}c)o_n(bo_{n+1}c)$$

Beweis

$$d_1=a,\ d_{m+1}=ao_nd_m$$

$$e_1=b,\ e_{m+1}=bo_ne_m$$

$$f_1=ao_nb,\ f_{m+1}=(ao_nb)o_nf_m$$

Da alle diese Summen dem Kommutativ- und Assoziativgesetz unterliegen, gilt:

1. $f_1=ao_nb=d_1o_ne_1$

2. Es gilt vollständige Induktion: Aus $f_m=d_mo_ne_m$ folgt:

$$f_{m+1}=(ao_nb)o_nf_m=(ao_nb)o_n(d_mo_ne_m)=(ao_nd_m)o_n(bo_ne_m)=d_{m+1}o_ne_{m+1}$$

So kommt man schließlich zu:

$$(ao_nb)o_{n+1}c \overset{\text{D11}}{=} f_{ind(c)} = d_{ind(c)}o_ne_{ind(c)} \overset{\text{D11}}{=} (ao_{n+1}c)o_n(bo_{n+1}c)$$

Satz 28 *Wenn o_n assoziativ ist, gilt diese Form der Distributivität (sofern a und b nicht 0 sind):*

$$\forall\, a,\ b,\ c\in\mathbb{G}\colon co_{n+1}(a\oplus b)=(co_{n+1}a)o_n(co_{n+1}b)$$

Beweis

$$d_1=c,\ d_{m+1}=co_nd_m$$

Es gilt $d_ko_nd_m=d_{k+m}$:

1. $d_1o_nd_m=co_nd_m=d_{1+m}$
2. $d_{k+1}o_nd_m=(co_nd_k)o_nd_m=co_n(d_ko_nd_m)=co_nd_{k+m}=d_{(k+1)+m}$

$$co_{n+1}(a\oplus b) \overset{\text{D11}}{=} d_{ind(a\oplus b)} \overset{\text{S13}}{=} d_{ind(a)+ind(b)} = d_{ind(a)}o_nd_{ind(b)} \overset{\text{D11}}{=} (co_{n+1}a)o_n(co_{n+1}b)$$

Satz 29 *Wenn o_n assoziativ ist, gilt dieses Gesetz, sofern a und b nicht 0 sind:*

$$\forall\, a,\ b,\ c\in\mathbb{G}\colon co_{n+1}(a\otimes b)=(co_{n+1}a)o_{n+1}b$$

Beweis

$$d_1=co_{n+1}a,\ d_{m+1}=(co_{n+1}a)o_nd_m$$

Es gilt nun $d_{ind(h)}=co_{n+1}(a\otimes h)$:

1. $d_{ind(1)}=d_1=co_{n+1}a \overset{\text{S15}}{=} co_{n+1}(a\otimes 1)$
2. $(d_{ind(h)}=co_{n+1}(a\otimes h))\Rightarrow(d_{ind(h\oplus 1)} \overset{\text{S13}}{=} d_{ind(h)+1}=(co_{n+1}a)o_nd_{ind(h)}=$ $(co_{n+1}a)o_n(co_{n+1}(a\otimes h)) \overset{\text{S28}}{=} (co_{n+1}(a\otimes h\oplus a)) \overset{\text{S28}}{=} (co_{n+1}(a\otimes(h\oplus 1))))$

A.2.6 Multiplikation

Satz 30 *0 ist links- und rechtskonstant zu $\otimes$.*

Beweis

1. $b_1 = 0,\ b_{n+1} = 0 \oplus b_n$

   Per Induktion ist diese Folge rein 0:

$$(b_n = 0) \Rightarrow (b_{n+1} = 0 \oplus b_n = 0 \oplus 0 =^{\text{S20}} 0)$$

   Daher ist auch:

$$0 \otimes a =^{\text{D11}} b_{ind(a)} = 0$$

2. Bei rechtsseitiger Null ergibt sich nach **Satz 26** auch konstant 0.

Satz 31 *1 ist das Linksneutrale von $\otimes$.*

Beweis Für $a = 0$ ist das Ergebnis nach **Satz 30** 0.
Ansonsten gilt:

$$b_1 = 1,\ b_{n+1} = 1 \oplus b_n$$

$$c_0 = 0,\ c_{n+1} = ink(c_n)$$

Diese beiden Folgen sind gleich:

1. $b_1 = 1 =^{\text{D5}} ink(0) = ink(c_0) = c_1$

2. $b_{n+1} = 1 \oplus b_n =^{\text{S18}} c_n \oplus 1 =^{\text{S20}} ink(c_n) = c_{n+1}$

$$1 \otimes a =^{\text{D11}} b_{ind(a)} = c_{ind(a)} =^{\text{D11}} 0 \oplus a =^{\text{S20}} a$$

Satz 32 *$\otimes$ ist kommutativ:*

$$\forall\, a,\ b \in \mathbb{G}:\ a \otimes b = b \otimes a$$

Beweis Für $a{=}0$ gilt:

$$0{\otimes}b{=}^{\text{S30}}0{=}^{\text{S30}}b{\otimes}0$$

Für die Induktion (wenn $a{\otimes}b{=}b{\otimes}a$) gilt:

$$(a{\oplus}1){\otimes}b{=}^{\text{S27}}(a{\otimes}b){\oplus}(1{\otimes}b){=}^{\text{S31}}(b{\otimes}a){\oplus}(b{\otimes}1){=}^{\text{S28}}b{\otimes}(a{\oplus}1)$$

Satz 33 $\otimes$ *ist assoziativ:*

$$\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\text{: } (a{\otimes}b){\otimes}c{=}a{\otimes}(b{\otimes}c)$$

Beweis Wenn einer der Faktoren 0 ist, so ist das Ergebnis in beiden Fällen auch 0 (**Satz 30**). Ansonsten ist die Assoziativität ein Spezialfall von **Satz 29**.

A.3 Umkehroperationen

A.3.1 Allgemein

Def. 13 *In einer Allgemeinen Algebra gilt:*

$$(ink(a){=}b){\Leftrightarrow}(a{=}dek(b))$$

Def. 14 *In einer Allgemeinen Algebra gilt:*

$$(a{=}c\iota_n b){\Leftrightarrow}(ao_n b{=}c)$$

$$(b{=}c\nu_n a){\Leftrightarrow}(ao_n b{=}c)$$

Diese beiden Verknüpfungen müssen definiert sein, wann immer es möglich ist.

Satz 34 *Das Rechtsneutrale r von o_n ist auch rechtsneutral zu ι_n.*

Beweis

$$a\iota_n r{=}(a\iota_n r)o_n r{=}^{\text{D14}}a$$

A.3.2 Monotonie

Satz 35

$$\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon ((a\iota_n c{<}b\iota_n c){\Leftrightarrow}(a{<}b)){\wedge}((a\nu_n c{<}b\nu_n c){\Leftrightarrow}(a{<}b))$$

*Dies ist der Fall, wenn die Monotonie für o_n gilt (**Satz 23/Satz 25**).*

Beweis

$$(a\iota_n c{<}b\iota_n c){\Leftrightarrow}((a\iota_n c)o_n c{<}(b\iota_n c)o_n c){\Leftrightarrow}^{\mathrm{D14}}(a{<}b)$$

Der Beweis für ν_n ist analog führbar.

Satz 36

$$\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon ((c\iota_n a{=}c\iota_n b){\Leftrightarrow}(a{=}b)){\wedge}((c\nu_n a{=}c\nu_n b){\Leftrightarrow}(a{=}b))$$

*Dies ist der Fall, wenn die Monotonie für o_n gilt (**Satz 23/Satz 25**).*

Beweis

$$(c{=}c){\Leftrightarrow}^{\mathrm{D14}}((c\iota_n a)o_n a{=}(c\iota_n b)o_n b){\Leftrightarrow}wahr$$

Wenn nun entweder die linken oder die rechten Seiten gleich sind, müssen nach der Monotonie für o_n auch beiden anderen Seiten gleich sein!

Der Beweis für ν_n ist analog führbar.

Satz 37

$$\forall\, a,\ b,\ c{\in}\mathbb{G}\colon ((c\iota_n a{<}c\iota_n b){\Leftrightarrow}(a{>}b)){\wedge}((c\nu_n a{<}c\nu_n b){\Leftrightarrow}(a{>}b))$$

*Dies ist der Fall, wenn die Monotonie für o_n gilt (**Satz 23/Satz 25**).*

Beweis Bestünde dieselbe Relation zwischen a und b wie zwischen $c\iota_n a$ und $c\iota_n b$, so wäre im Fall $<$ (für $>$ analog) wegen der Monotonie von o_n:

$$((c\iota_n a)o_n a{<}(c\iota_n b)o_n b){\Leftrightarrow}^{\mathrm{D14}}(c{<}c){\Leftrightarrow}falsch$$

Der Beweis für ν_n ist analog führbar.

Anhang B

Literaturverzeichnis

1. Wikipedia: Babylonisches Wurzelziehen. (6. 2. 2006).
   http://de.wikipedia.org/wiki/Babylonisches_Wurzelziehen
   (11. 2. 2006).

2. Wikipedia: Cantor-Diagonalisierung. (10. 1. 2006).
   http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Diagonalisierung
   (11. 2. 2006).

3. Wikipedia: Natürliche Zahl. (9. 2. 2006).
   http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Zahl
   (11. 2. 2006).

4. Wikiquote: Carl Friedrich Gauß. (19. 9. 2005).
   http://de.wikiquote.org/wiki/Carl_Friedrich_Gau%C3%9F
   (15. 2. 2006).

Begleitprotokoll zur FBA

1. 7. 2005:
Erste Besprechung, 2 Themenvorschläge vorgestellt.

27. 10. 2005:
Gliederung der Arbeit, Grundlagen; Verständlichkeit, Kontinuumproblem.

3. 11. 2005:
Ersten Vorschlag für Grundlagen-Kapitel besprochen, Erklärungen meiner Ansichten, Definitionen, Beweise.

10. 11. 2005:
Problem: Mehrdeutige Variablenbelegung bei meiner derzeitigen Formulierung der Axiome.

24. 11. 2005:
Auflockern der Omikrondefinition nötig (Beispiele), am Beispiel der natürlichen Zahlen erklären.

1. 12. 2005:
Bezug zur Strukturentheorie herstellen? Disposition nochmals durchbesprochen.

15. 12. 2005:
Was ist o_3 genau, was kann man sich darunter vorstellen? Beispiele anführen! Weiters Skizze und Erklärung zu 2d-Induktion, und Aufdeckung eines Programmfehlers in meiner Transformation.

19. 1. 2006:
Hinweis auf Tippfehler und Unklarheiten, werden behoben werden.

2. 2. 2006:
Besprechung des Irrationalitätsbeweises der Hyperwurzeln; Frage nach o_4: Bedeutung, Aussprache?

9. 2. 2006:
Letzte Fragen bezüglich Verständlichkeit/Aufbau gestellt:

- "Durch Iteration mit *ink*" genauer erklären? — Nein, ist klar.
- Warum aus $-1 \cdot -1 = +1$ die Nötigkeit von $\mathbb{C}$ folgt? — Erklären.
- $a \neq \{a\}$ bereits klar? — Ist klar.
- Beim Höheren Rücksicht auf die indirekte Definition von ι und ν nehmen? — Nicht nötig.
- Algorithmen bei Hyperwurzelberechnung erklären, wie? — Pseudocode, Beispiele.

Anhang A (Formales) besprochen.